

Bases de un espacio vectorial

- * Conjuntos linealmente dependientes y conjuntos linealmente independientes
- * Conjunto generador
- * Base de un espacio vectorial



Conjuntos linealmente dependientes y conjuntos linealmente independientes

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente dependiente* si algún elemento $\bar{v}$ de U es combinación lineal de los restantes, es decir, si existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ y $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r \in U$ tales que

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \dots + \lambda_r \bar{u}_r.$$

Otra manera de decir esto:
es que $\bar{0}$ es combinación
lineal, no trivial, de los
vectores de U

Ejemplos:

1) En $V = \mathbb{R}^2$ considera $U = \{(0, 1), (0, 3)\}$
 $(0, 3) = 3(0, 1)$

2) En $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(0, 0, 1), (-1, 0, 0), (3, 0, 4)\}$
 $(3, 0, 4) = 4(0, 0, 1) + (-3)(-1, 0, 0)$

3) En $V =$ funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ considera las funciones f, g, h con reglas de asignación
 $f(x) = 1, g(x) = x, h(x) = -2x, k(x) = 8x - 4$

a) $U = \{g, h\}$ me fijo en las reglas de asignación.
 $h(x) = -2x = (-2)x = (-2)g(x) \Rightarrow h = -2g$

b) $U = \{f, g, k\}$
 $k(x) = 8x - 4 = 8(x) - 4(1) = 8(g(x)) + (-4)(f(x)) \Rightarrow k = 8g + (-4)f$

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es *linealmente independiente* si ninguno de sus elementos es combinación lineal de los restantes, es decir, si **no** puede establecerse con ellos una combinación lineal igual al vector nulo y con al menos un coeficiente no cero. Es decir, si una combinación lineal de elementos de U da lugar al vector nulo,

$$\mu_1 \bar{u}_1 + \mu_2 \bar{u}_2 + \cdots + \mu_s \bar{u}_s = \bar{0},$$

todos los coeficientes deben ser cero:

$$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_s = 0.$$

Otra manera de decir esto:

es que $\bar{0}$ no es combinación lineal, no trivial, de los vectores de U

Ejemplo

1) En $\mathbb{R}^2$, $U = \{(0,1), (1,1)\}$

$$\lambda(0,1) + \lambda_2(1,1) = (0,0) \rightarrow (\lambda_2, \lambda_2) = (0,0) \rightarrow (\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \rightarrow \lambda_2 = 0 \text{ y } \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \rightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 = 0 \rightarrow U \text{ es l.i.}$$

2) En $V = \text{funciones de } \mathbb{R} \text{ en } \mathbb{R}$ considera las funciones f, g, h con reglas de asignación

$$f(x) = 1, \quad g(x) = x, \quad h(x) = -2x, \quad k(x) = -8x - 4$$

$$\text{a) } U = \{f, g\} \quad \lambda_1 f + \lambda_2 g = 0 \rightarrow \lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda_1(1) + \lambda_2(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 x = 0 \quad \forall x \rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 x \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

b) $U = \{h, k\}$

$$\lambda_1 h + \lambda_2 k = 0 \rightarrow \lambda_1 h(x) + \lambda_2 k(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda_1(-2x) + \lambda_2(-8x - 4) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow -2\lambda_1 x - 8\lambda_2 x - 4\lambda_2 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \rightarrow -2\lambda_1 x = 8\lambda_2 x + 4\lambda_2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda_1 = \frac{8\lambda_2 x + 4\lambda_2}{-2x} = \frac{(-4x - 2)}{x} \lambda_2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Conjunto generado por un conjunto U

Sea V un espacio vectorial y U un subconjunto de V .

Definimos el conjunto generado por U como

$$\langle U \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ y } v_i \in U \text{ para } i=1,2,\dots,n \}$$

Ejemplos:

$$\langle (0,0) \rangle =$$

$$\langle (1,1) \rangle =$$

En $V = \text{funciones de } \mathbb{R} \text{ en } \mathbb{R}$ considera las funciones f, g, h con reglas de asignación

$$f(x) = 1, \quad g(x) = x, \quad h(x) = -2x, \quad k(x) = -8x - 4$$

$$\langle f \rangle =$$

$$\langle f, g \rangle =$$

$$\langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle =$$

$$\langle (2,0,0), (0,3,0), (0,0,-3) \rangle =$$

Conjunto generado por un conjunto U

Sea V un espacio vectorial y U un subconjunto de V .

Definimos el conjunto generado por U como

$$\langle U \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ y } v_i \in U \text{ para } i=1, 2, \dots, n \}$$

Ejemplos:

$$\langle (0,0) \rangle = \{ \lambda (0,0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ (0,0) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ (0,0) \}$$

$$\langle (1,1) \rangle = \{ \lambda (1,1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ (\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

En $V = \text{funciones de } \mathbb{R} \text{ en } \mathbb{R}$ considera las funciones f, g, h con reglas de asignación

$$f(x) = 1, \quad g(x) = x, \quad h(x) = -2x, \quad k(x) = 8x - 4$$

$$\langle f \rangle = \{ \lambda f \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \{ \text{funciones } l \text{ con regla de asignación } l(x) = \lambda f(x) = \lambda(1) = \lambda \} = \{ \text{funciones constantes} \}$$

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \{ \lambda_1 f + \lambda_2 g \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} = \{ \text{funciones } l \text{ con regla de asignación } l(x) = \lambda_1(1) + \lambda_2(x) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \text{funciones } l \text{ con regla de asignación } l(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ \text{funciones lineales} \} \end{aligned}$$

$$\langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle = \{ \lambda_1 (1,0,0) + \lambda_2 (0,1,0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} = \{ (\lambda_1, 0, 0) + (0, \lambda_2, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} = \{ (\lambda_1, \lambda_2, 0) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \} = \text{Plano } xy$$

$$\langle (2,0,0), (0,3,0), (0,0,-3) \rangle = \{ \lambda_1 (2,0,0) + \lambda_2 (0,3,0) + \lambda_3 (0,0,-3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \} = \{ (2\lambda_1, 0, 0) + (0, 3\lambda_2, 0) + (0, 0, -3\lambda_3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^3$$

Observación:

Sea V un E.V. y $U \subseteq V$. Entonces $\langle U \rangle$ es un subespacio vectorial.

Dem.

Ejercicio



Ok, ok, les daré una pista.

Observación:

Sea V un E.V. y $U \subseteq V$. Entonces $\langle U \rangle$ es un subespacio vectorial.

Dem.

Veamos que $\langle U \rangle$ cumple las 4 propiedades de subespacio.

* Cerradura de W bajo suma

* Neutro aditivo

* Inverso aditivo

* Cerradura bajo producto

Observación:

Sea V un E.V. y $u \in V$. Entonces $\langle u \rangle$ es un subespacio vectorial.

Dem.

Veamos que $\langle u \rangle$ cumple las 4 propiedades de subespacio.

* Cerradura de W bajo suma

Sean $v, w \in \langle u \rangle$. Entonces $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ y $w = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_m w_m$ con $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ y $v_i, w_i \in U$.

$$v + w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + (\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_m w_m) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \dots + \lambda_{n+m} u_{n+m} \text{ con } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ y } u_i \in U$$

pues $\lambda_i = \alpha_i$ para $i = 1, \dots, n$ y $\lambda_{n+i} = \beta_i$ para $i = 1, \dots, m$ y $u_i = v_i$ para $i = 1, \dots, n$ y $u_{n+i} = w_i$ para $i = 1, \dots, m$.

* Neutro aditivo

Como $\vec{0} = 0u \quad \forall u \in U$ entonces $\vec{0} \in U$

* Inverso aditivo

Sea $v \in \langle u \rangle \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $v_i \in U$ entonces $-v = (-\alpha_1)v_1 + (-\alpha_2)v_2 + \dots + (-\alpha_n)v_n \in \langle u \rangle$

* Cerradura bajo producto

Sean $v \in \langle u \rangle$ y $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $v_i \in U$. Luego

$$\lambda v = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = \lambda \alpha_1 v_1 + \lambda \alpha_2 v_2 + \dots + \lambda \alpha_n v_n \in \langle u \rangle \text{ pues } \lambda \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es un *conjunto generador del espacio vectorial* V si cualquier elemento de V puede obtenerse como combinación lineal de elementos de U , es decir, para cualquier $\bar{v} \in V$ se tiene

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \cdots + \lambda_s \bar{u}_s,$$

para algunos $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \in U, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo.

$$* \text{ S: } U = \{(1,0), (0,1)\} \rightarrow \langle U \rangle = \mathbb{R}^2$$

$$* \text{ S: } U = \{(1,0), (0,1), (5,-8)\} \rightarrow \langle U \rangle = \mathbb{R}^2$$

* Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial formado por los polinomios con la variable x y coeficientes reales. Entonces el conjunto $U = \{1, x, x^2, \dots\}$ genera a $\mathbb{R}[x]$

Nota: Para demostrar que $\langle U \rangle = V$ sólo hace falta demostrar $V \subseteq \langle U \rangle$. Pues la otra contención $\langle U \rangle \subseteq V$ la garantizan la cerradura de suma y de producto escalar de V .

Definición. Un subconjunto U de un espacio vectorial V es un *conjunto generador del espacio vectorial* V si cualquier elemento de V puede obtenerse como combinación lineal de elementos de U , es decir, para cualquier $\bar{v} \in V$ se tiene

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \cdots + \lambda_s \bar{u}_s,$$

para algunos $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \in U, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Ejemplo.

$$* \text{ Si: } U = \{(1,0), (0,1)\} \rightarrow \langle U \rangle = \mathbb{R}^2$$

Dem. (Por demostrar: (Cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de $(1,0)$ y $(0,1)$.)

Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) \in \langle U \rangle$. ■

$$* \text{ Si: } U = \{(1,0), (0,1), (5,-8)\} \rightarrow \langle U \rangle = \mathbb{R}^2$$

Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entonces $(x,y) = x(1,0) + y(0,1) + 0(5,-8) \in \langle U \rangle$.

* Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial formado por los polinomios con la variable x y coeficientes reales. Entonces el conjunto $U = \{1, x, x^2, \dots\}$ genera a $\mathbb{R}[x]$

Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio. Entonces $p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1} = a_1(1) + a_2(x) + a_3(x^2) + \cdots + a_n(x^{n-1}) \in \langle U \rangle$.

Nota: Para demostrar que $\langle U \rangle = V$ sólo hace falta demostrar $V \subseteq \langle U \rangle$. Pues la otra contención $\langle U \rangle \subseteq V$ la garantizan la cerradura de suma y de producto escalar de V .

Definición. Un subconjunto de un espacio vectorial es una *base* del espacio vectorial si tiene las propiedades de generar al espacio vectorial y la de ser un subconjunto linealmente independiente.

En símbolos $B \subseteq V$ es base de V . Si:

1) $\langle B \rangle = V$

2) B es linealmente independiente

Ejemplos:

* $B = \{(1,0), (0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$

* $B = \{(1,0), (0,1), (5,-8)\}$ No es base de $\mathbb{R}^2$

* Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial formado por los polinomios con la variable x y coeficientes reales. Entonces el conjunto $B = \{1, x, x^2, \dots\}$ es base de $\mathbb{R}[x]$

Definición. Un subconjunto de un espacio vectorial es una *base* del espacio vectorial si tiene las propiedades de generar al espacio vectorial y la de ser un subconjunto linealmente independiente.

En símbolos $B \subseteq V$ es base de V . Si:

1) $\langle B \rangle = V$

2) B es linealmente independiente

Ejemplos:

* $B = \{(1,0), (0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$

Dem. Hay que ver que se cumplan 1) y 2)

1) Lo hicimos en la página anterior

2) $\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Por lo tanto B es l.i.

* $B = \{(1,0), (0,1), (5,-8)\}$ No es base de $\mathbb{R}^2$

1) Lo hicimos en la página anterior

2) Como $5(1,0) + (-8)(0,1) + (-1)(5,-8) = (0,0)$ B no es l.i. y portanto

No es base de $\mathbb{R}^2$

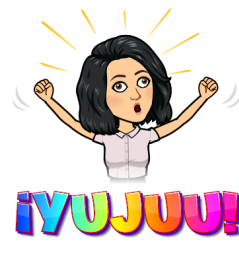
* Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial formado por los polinomios con la variable x y coeficientes reales. Entonces el conjunto $B = \{1, x, x^2, \dots\}$ es base de $\mathbb{R}[x]$

1) Lo hicimos en la página anterior

Si es base de $\mathbb{R}[x]$

2) Notemos que la suma de productos escalares con x en ciertas potencias solo nos puede dar polinomios cuyos términos tengan esas mismas potencias. Lo cual implica que B es l.i.

Supongamos que hay una combinación lineal de elementos $v_1, \dots, v_n \in V$ tal que $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ ^{polinomio 0}
eso quiere decir que el coeficiente de x^i es 0 $\forall i$. Entonces $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. $\therefore B$ es l.i.



+ Imágenes creadas con Bitmoji

+ Notas hechas por Arilín Haro, de
Arilin's Math World

