

Ejercicios

Bases de espacios vectoriales



Ejercicio 1.

Cualesquiera dos vectores en $\mathbb{R}^2$ que no sean uno múltiplo del otro forman una base de $\mathbb{R}^2$.

Para esto hay que verificar dos cosas: ① Los vectores son l.i., ② los vectores generan $\mathbb{R}^2$

Sean $u=(x_1, y_1)$ y $v=(x_2, y_2)$ dos vectores como en el ejercicio, $\Rightarrow (x_1, y_1) \neq \lambda(x_2, y_2) \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

- ① Supongamos que existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) = (0, 0) \Rightarrow \lambda_1(x_1, y_1) = -\lambda_2(x_2, y_2)$
 $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Pues si $\lambda_1 \neq 0$ podríamos dividir: λ_1 y tendríamos $(x_1, y_1) = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1}(x_2, y_2)$ lo cual contradice la hipótesis de no ser múltiplos uno del otro. El caso $\lambda_2 \neq 0$ nos lleva a la misma contradicción. Por lo tanto $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Lo que implica que u, v son l.i.

- ② Sea (a, b) un vector en $\mathbb{R}^2$. Para ver que $\langle u, v \rangle = \mathbb{R}^2$ necesito poner a (a, b) como combinación lineal de u y v . ¡Intentémoslo!

$$\begin{aligned}\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) &= (a, b) \iff \\ (\lambda_1 x_1, \lambda_1 y_1) + (\lambda_2 x_2, \lambda_2 y_2) &= (a, b) \iff \\ (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= (a, b) \iff \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 &= a \quad y \quad \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = b.\end{aligned}$$

Queremos encontrar λ_1 y λ_2 que complan el sistema.



Haciendo las cuentas obtenemos que la solución de sistema de ecuaciones es:

$$\lambda_1 = \frac{ay_2 - bx_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{bx_1 - ay_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

Notemos que en nuestro caso estas λ_1 y λ_2 sí existen pues $x_1 y_2 - x_2 y_1 \neq 0$.

$$\begin{aligned}(\text{De no ser así tendríamos: } x_1 y_2 = x_2 y_1 \iff \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \\ \iff \frac{x_1}{y_1} = \frac{\lambda x_2}{\lambda y_2} \iff (x_1, y_1) = \lambda(x_2, y_2)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}& \left(\frac{ay_2 - bx_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \right) (x_1, y_1) + \left(\frac{bx_1 - ay_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \right) (x_2, y_2) = \\ & \left(\frac{ay_2 x_1 - \cancel{bx_2 x_1} + \cancel{bx_1 x_2} - ay_1 x_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \frac{\cancel{ay_2 y_1} - \cancel{bx_2 y_1} + \cancel{bx_1 y_2} - \cancel{ay_1 y_2}}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \right) = \\ & (a, b).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\{u, v\}$ sí es base de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 2.

Un conjunto $B \subseteq V$ es una base de V si y sólo si B es un conjunto máximo linealmente independiente.

Dem.

→

Sea $B \subseteq V$ una base de V . Quiero ver que B es un conjunto máximo l.i., es decir que para todo $v \in V - B$ el conjunto $B \cup \{v\}$ no es l.i.
Sea $v \in V - B$, como B es base de V , B genera a v . es decir, existen $u_1, \dots, u_n \in B$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$. Lo que implica que $B \cup \{v\}$ no es l.i. pues $\vec{0} = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n + (-1)v$ es una combinación lineal que da 0 y al menos uno de sus escalares no es cero.

Esto implica que siempre que agreguemos un vector v a B este deja de ser l.i. por lo tanto es un conjunto máximo l.i. .

←

Sea B un conjunto máximo l.i. Quiero ver que B es base de V . Como B es l.i. solo falta ver que $\langle B \rangle = V$ para poder decir que B es base.

Vamos por contradicción.

Supongamos que B no genera a V . Entonces existe $v \in V$ tal que v no se puede escribir como combinación lineal de los elementos de B . Pero esto implica que si agrego v a B el conjunto $B \cup \{v\}$ es linealmente independiente. !
Lo cual es una contradicción con que B sea un máximo l.i.

Por lo tanto $\langle B \rangle = V$.

Así que B es base de V .

Ejercicio 3.

Un conjunto $B \subseteq V$ es una base de V si y sólo si B es un conjunto mínimo generador de V .

Dem.

$\rightarrow$

Sea B una base de V . Queremos ver que B es un conjunto mínimo generador de V .

Haremos esto por contradicción.

Supongamos que B es base de V pero no es un conjunto mínimo generador. Entonces existe algún elemento $u \in B$ tal que $B - \{u\}$ sigue generando a V . En particular $B - \{u\}$ genera a u . Por lo tanto $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$ con $v_i \in B$ y $\lambda_i \in \mathbb{R} \forall i$. Pero esto es una contradicción pues como B es base de V tendría que ser l.i. sin embargo acabamos de poner a uno de sus elementos como combinación lineal de los otros!

$\therefore B$ tiene que ser conjunto mínimo generador.

$\leftarrow$

Supongamos que B es un conjunto mínimo generador de V . Queremos ver que B es una base de V . Para esto hay que ver que $\langle B \rangle = V$ y que B es l.i.

La condición $\langle B \rangle = V$ se cumple pues B es un conjunto mínimo generador de V . Pasemos entonces a la condición B es l.i. Otra vez vamos por contradicción.

Supongamos que B no es l.i. entonces existen $v, u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n.$$

Pero esto implica que B no es un mínimo generador pues cada vez que se use v para generar un elemento de V puedo sustituir v con $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$.

Teniendo así que $B - \{v\}$ es un conjunto generador lo cual es una contradicción!

Por lo tanto B sí es l.i. y sí es base de V .