Producto punto

- Definición
- Propiedades

Arilin's Math World

Producto punto

Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y
Sean $u=(u_1,\dots,u_n)$ y $v=(v_1,\dots,v_n)$ vectores.
Definimos el producto punto de u y v como:

$$u\cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

Observación: $u\cdot v$ es un número real.

Dem. Como $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ $\forall i=1,\dots,n \to$
$u_i v_i \in \mathbb{R}$ $\forall i=1,\dots,n \to \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in \mathbb{R}$ ■

¿Cómo se ve la fórmula del producto punto en R ?

$u=(u_1,u_2)$ $v=(v_1,v_2)$ $\to$ $u\cdot v = u_1v_1+u_2v_2$

Ejemplo: Considera $u=(0,7)$ y $v=(3,2)$ y calcula $u\cdot v$

$(0,7)\cdot(3,2) = 0\cdot 3+7\cdot 2 = 0+14 = 14$

¿Cómo se ve la fórmula del producto punto en $\mathbb{R}^3$?

$u=(u_1,u_2,u_3)$ y $v=(v_1,v_2,v_3)$ $\to$ $u\cdot v = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$

Ejemplo:

$(1,1,1)\cdot(2,3,4) = 2+3+4 = 9$

Propiedades

Consideremos $u=(u_1,\dots,u_n)$, $v=(v_1,\dots,v_n)$, $w=(w_1,\dots,w_n)$

1) Conmutatividad $u\cdot v = v\cdot u$

$$u\cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = v\cdot u$$

2) Distributividad $u\cdot(v+w) = u\cdot v + u\cdot w$

$$u\cdot(v+w) = (u_1,\dots,u_n)\cdot(v_1+w_1,\dots,v_n+w_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i+w_i) = \sum_{i=1}^{n}(u_iv_i+u_iw_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} u_iv_i + \sum_{i=1}^{n} u_iw_i = u\cdot v + u\cdot w$$

3) Saca escalares $(\lambda u)\cdot v = \lambda(u\cdot v)$ $\lambda\in\mathbb{R}$

$$(\lambda u)\cdot v = (\lambda u_1,\dots,\lambda u_n)\cdot(v_1,\dots,v_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}(\lambda u_i)v_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda(u_iv_i) = \lambda(u\cdot v)$$

$\lambda\sum_{i=1}^{n} u_iv_i = \lambda(u\cdot v)$

4) Definido positivo $u\cdot u \geq 0$

$$u\cdot u = \sum_{i=1}^{n} u_iu_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \geq 0}_{\text{pues } u_i^2\geq 0 \ \forall u_i\in\mathbb{R}}$$

Notemos que $\sqrt{u\cdot u} = d(\bar{0},u)$ = longitud de u

Definimos la norma del vector u como

$$\|u\| = \sqrt{u\cdot u}$$

5) Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$$

6) Mide el ángulo θ_{uv} entre u y v.

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos \theta_{uv}$$

De aquí que $\cos \theta_{uv} = \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$ y por tanto

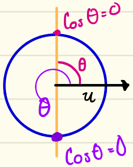
$$\theta_{uv} = \operatorname{ArcCos}\left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}\right)$$

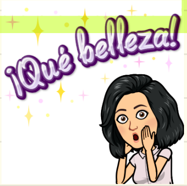
Notemos que:

u y v son perpendiculares

$\leftrightarrow$ $\cos \theta_{uv} = 0$

$\leftrightarrow$ $u \cdot v = 0$





Definición

Diremos que u y v son ortogonales si $u \cdot v = 0$.

Ejercicios:

$(-1,2,3) \cdot (1,-2,-3) =$

$(2,0) \cdot (0,2) =$

$(0,0,z) \cdot (x,y,0) =$

$(7,-5,3) \cdot (5,7,0) =$

$(1,2,1,2) \cdot (2,-1,-2,1) =$

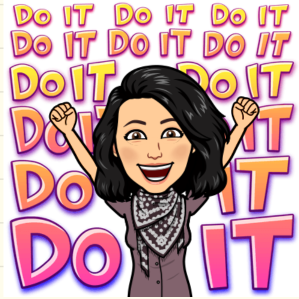
$(2,1) \cdot (1,2) =$

$(-2,1) \cdot (1,2) =$

$(0,y) \cdot (x,0) =$

$(x,0) \cdot (-x,0) =$

$u \cdot (-u)$ en $\mathbb{R}^2$



Calcula el ángulo entre $(1,1,2)$ y $(1,-1,2)$

Utiliza la propiedad 6) para demostrar que:

a) el ángulo de un vector con si mismo es 0

b) el ángulo entre un vector y su inverso aditivo es 180°

Soluciones →

Soluciones

$(-1,2,3)\cdot(1,-2,-3) = (-1)(1)+(2)(-2)+(3)(-3)$
$= (-1)+(-4)+(-9) = -14$

$(2,0)\cdot(0,2) = (2)(0)+(0)(2) = 0+0=0$

$(0,0,z)\cdot(x,y,0) = (0)(x)+(0)(y)+(z)(0) = 0+0+0=0$

$(7,-5,3)\cdot(5,7,0) = (7)(5)+(-5)(7)+(3)(0) = 35+(-35)+0=0$

$(1,2,1,2)\cdot(2,-1,-2,1) = (1)(2)+(2)(-1)+(1)(-2)+(2)(1)$
$= 2-2-2+2=0$

$(2,1)\cdot(1,2) = (2)(1)+(1)(2) = 2+2=4$

$(-2,1)\cdot(1,2) = (-2)(1)+(1)(2) = -2+2=0$

$(0,y)\cdot(x,0) = (0)(x)+(y)(0) = 0+0=0$

$(x,0)\cdot(-x,0) = (x)(-x)+(0)(0) = -x^2$

Siempre en $\mathbb{R}^n$

$u\cdot(-u)$ en $\mathbb{R}^2$ $\qquad u\cdot(-u) = -\|u\|^2$

$(x,y)\cdot(-x,-y) = (x)(-x)+(y)(-y) = -x^2-y^2$
$= -(x^2+y^2) = -\|u\|^2$

Calcula el ángulo entre $\underset{u}{\underline{(1,1,2)}}$ y $\underset{v}{\underline{(1,-1,2)}}$

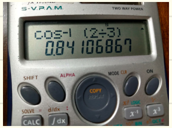
$u\cdot v = (1,1,2)\cdot(1,-1,2) = 1+(-1)+4 = 4$ $\qquad \theta = \operatorname{ArcCos}\left(\dfrac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|}\right)$

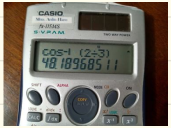
$\|u\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\|v\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$\dfrac{u\cdot v}{\|u\|\,\|v\|} = \dfrac{4}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{4}{(\sqrt{6})^2} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

$\theta = \operatorname{ArcCos}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48.18°$ o bien 0.84 rad.

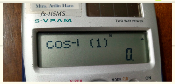




Utiliza la propiedad 6) para demostrar que:

a) el ángulo de un vector con si mismo es 0

$\dfrac{u\cdot u}{\|u\|\,\|u\|} = \dfrac{\|u\|^2}{\|u\|^2} = 1$

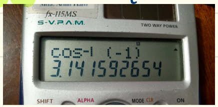


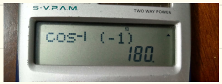
$\theta_{u,u} = \operatorname{ArcCos}\left(\dfrac{u\cdot u}{\|u\|\,\|u\|}\right) = \operatorname{ArcCos} 1 = 0$

b) el ángulo entre un vector y su inverso aditivo es $180°$

$\dfrac{u\cdot(-u)}{\|u\|\,\|u\|} = \dfrac{-1(u\cdot u)}{\|u\|^2} = \dfrac{-\|u\|^2}{\|u\|^2} = -1$

$\theta_{u,-u} = \operatorname{ArcCos}\left(\dfrac{u\cdot(-u)}{\|u\|\,\|u\|}\right) = \operatorname{ArcCos}(-1) = 180° = \pi$ rad





- Imágenes creadas con Bitmoji

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World