Producto cruz

* Definición
* Propiedades
* Ejemplos

Producto cruz

Ubiquémonos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ 

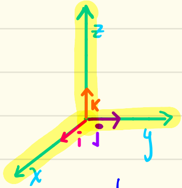
Notación súper importante de recordar para poder continuar con nuestra vida... ok, con nuestro tema.

Recordamos que los vectores

$\hat{i} = (1,0,0)$,

$\hat{j} = (0,1,0)$

$\hat{k} = (0,0,1)$



son una base para este espacio.

Así que cualquier vector (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$ lo puedo ver de la forma

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Con esto en mente y considerando los vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ vectores.

Definimos el producto cruz (o producto vectorial) u y v como el determinante de la matriz de 3x3 cuyos renglones son $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, u y v.
Es decir

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \hat{i}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

$$= (u_2 v_3 - v_2 u_3)\hat{i} - (u_1 v_3 - v_1 u_3)\hat{j} + (u_1 v_2 - v_1 u_2)\hat{k}$$

Ejemplo:

$$(1,1,1) \times (1,0,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \hat{i}(1(0) - 0(1)) - \hat{j}(1(0) - 1(1)) + k(1(0) - 1(1))$$

$$= \hat{i}(0-0) - \hat{j}(0-1) + k(0-1)$$

$$= 0\hat{i} + 1\hat{j} - 1k$$

$$= (0, 1, -1)$$

Ejemplos aleatorios:

1) $u = (2, 3, 5)$
$v = (7, -4, 5)$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(15-(-20)) - \hat{j}(10-35) + \hat{k}(-8-21)$$

$$= \hat{i}(15+20) - \hat{j}(-25) + \hat{k}(-29)$$

$$= 35\hat{i} + 25\hat{j} - 29\hat{k} = (35, 25, -29)$$

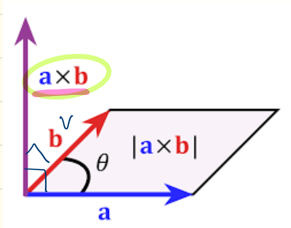
2) $u = (3, 2, -2)$, $v = (-6, -4, 4)$ $\qquad v = -2u$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \hat{i}(2(4) - (-4)(-2)) - \hat{j}(3(4) - (-6)(-2)) + k(3(-4) - (-6)(2))$$

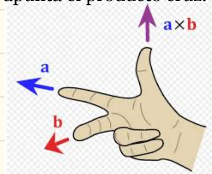
$$= \hat{i}(8-8) - \hat{j}(12-12) + k(-12-(-12))$$

$$= 0\hat{i} - 0\hat{j} + 0k = (0, 0, 0)$$

Propiedades



Regla de la mano derecha:
Nos dice para que lado
apunta el producto cruz.



1) Anticonmutativo

$$u \times v = -\, v \times u$$

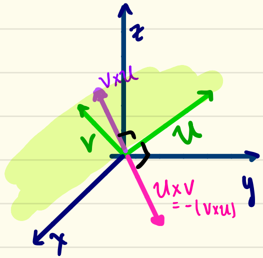
2) Distributivo

$$u \times (v + w) = u \times v + u \times w$$

3) Saca escalares

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad (\lambda u) \times v = \lambda (u \times v)$

4) El producto vectorial de u y v es perpendicular a cada uno de sus factores. O sea que es perpendicular al plano generado por u y v.



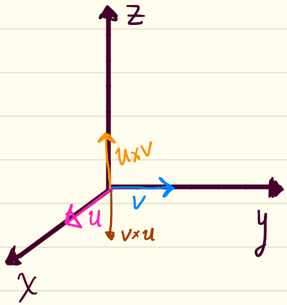
Ejemplo:

$$(1,0,0) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i(0-0) - j(0-0) + k(1-0)$$

$$= 0\hat{i} - 0\hat{j} + 1k = (0,0,1)$$

$$(0,1,0) \times (1,0,0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = i(1(0) - 0(0)) - \hat{j}(0(0) - 1(0)) + k(0(0) - 1(1)) = 0\hat{i} - 0\hat{j} - 1k$$

$$= (0,0,-1).$$



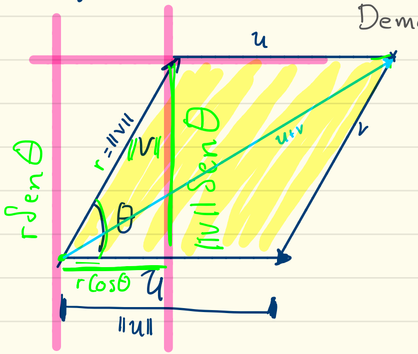
5) $\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \, |\operatorname{sen} \theta|$

donde θ es el ángulo entre u y v

6) Consecuencia de 5)

El área del paralelogramo formado por u y v es: $\|u \times v\|$

Demostración:



Área del parelogramo

$= b \times h$

$= \underbrace{\|u\|} \, \underbrace{\|v\| \, |\operatorname{sen}\theta|}$

$= \|u \times v\|$ prop. 5)

7) Si u y v son paralelos entonces $u \times v = 0$

Ejercicio:

Calcular el área del paralelogramo definido por los vectores $(1,0,3)$ y $(0,2,1)$

El área es: $\|(1,0,3) \times (0,2,1)\|$

$$(1,0,3) \times (0,2,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= i\big(0(1) - 2(3)\big) - j\big(1(1) - 0(3)\big) + k\big(1(2) - 0(0)\big)$$

$$= \hat{\imath}(0-6) - \hat{\jmath}(1-0) + \hat{k}(2-0)$$

$$= \hat{\imath}(-6) - j(1) + k(2)$$

$$= -6\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2k$$

$$= (-6, -1, 2)$$

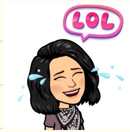
$$\|(1,0,3) \times (0,2,1)\| = \|(-6,-1,2)\|$$

$$= \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{36 + 1 + 4}$$

$$= \sqrt{41} \approx 6.403$$

área $= 6.403$ algo^2



- Imágenes creadas con Bitmoji

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World