Producto triple

* Definición
* Propiedades
* Ejercicios

Arilin's Math World

Producto triple

De nuevo, nos ubicamos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

Consideremos los vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ con coordenadas $u=(u_1, u_2, u_3)$, $v=(v_1, v_2, v_3)$ y $w=(w_1, w_2, w_3)$.

Definimos el producto triple de u, v y w como: $u \cdot v \times w$, es decir el producto punto de u con $v \times w$.

Ya que conocemos la definición del producto triple hagamos las cuentas para demostrar el siguiente resultado.

Observación. El producto triple $u \cdot v \times w$ es el determinante de la matriz de 3×3 cuyos renglones son u, v y w.

Demostración:

$$u \cdot v \times w = (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= (u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} + (-u_2) \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad \blacksquare$$

Nota:

En algunos textos se ultiliza la notación $[u, v, w]$ para referirse a $u \cdot v \times w$.

Ejemplo: Calcular $[u, v, w]$ para $u = (0, 0, 1)$, $v = (0, 2, 0)$ y $w = (3, 0, 0)$

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 + 1(0(0) - 3(2)) = 1(-6)$$

$$= -6$$

Propiedades

1) Cíclico

$[u, v, w] = [v, w, u] = [w, u, v]$

Cambian de lugar pero en un mismo orden

2) Anticonmutativo

$[u, v, w] = -[v, u, w]$

Cambia de signo al intercambiar dos de los vectores.

3) Distribuye la suma

$[u_1 + u_2, v, w] = [u_1, v, w] + [u_2, v, w]$

$[u, v_1 + v_2, w] = [u, v_1, w] + [u, v_2, w]$

$[u, v, w_1 + w_2] = [u, v, w_1] + [u, v, w_2]$

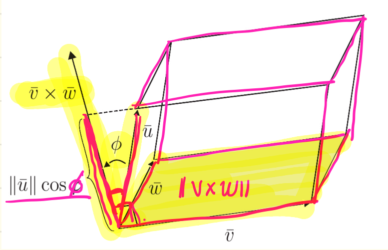
4) Saca escalares

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple

$\lambda [u, v, w] = [\lambda u, v, w] = [u, \lambda v, w] = [u, v, \lambda w]$

5) $[u, v, w] = \|u\| \, \|v \times w\| \cos \phi$ donde ϕ es el ángulo entre u y $v \times w$.

6) $|[u, v, w]|$ es el volumen del paralelepípedo formado por u, v y w.



$\text{Vol} = b \times h$

$b = \|v \times w\|$

$h = \|u\| \cos \phi$

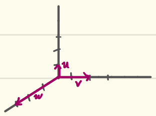
$\text{Vol.} = \|u\| \, \|v \times w\| \cos \phi$

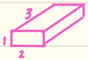
$= |[u, v, w]|.$

Ejemplo. Calcula el volumen del paralelepípedo formado por $\underset{v}{(0,2,0)}$, $\underset{w}{(3,0,0)}$ y $\underset{u}{(0,0,1)}$.

En la página anterior calculamos $[u, v, w] = -6$.

Entonces $\text{Vol}_{v,w,u} = |-6| = 6$





$\text{Vol} = b \times h$
$= (3 \times 2) \times 1$
$= 6 \times 1 = 6$

Ejercicios

1) Considere $u, w \in \mathbb{R}^3$ y $\bar{0} = (0,0,0)$ ¿Es cierto que el producto triple de u, w y $\bar{0}$ es 0?

2) Calcule el volumen del paralelepípedo definido por u, v y w

   a) $u = (-1, 2, 1)$, $v = (4, 3, 1)$ y $w = (-3, -5, -2)$

   b) $u = (-1, 2, 1)$, $v = (4, 3, 1)$ y $w = (-3, -5, 0)$

3) ¿Qué significa que $[u, v, w] = 0$?

Soluciones →

Ejercicios y Soluciones

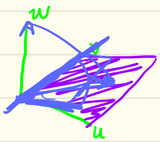
1) Considere $u, w \in \mathbb{R}^3$ y $\bar{0}=(0,0,0)$ ¿Es cierto que el producto triple de u, w y $\bar{0}$ es 0?

$$[u,w,\bar{0}]=[w,\bar{0},u]=[\bar{0},u,w]=\bar{0}\cdot(u\times w)=0$$

Sí, pues $\bar{0}\cdot v=0$ para toda $v\in\mathbb{R}^3$.

3) ¿Qué significa que $[u,v,w]=0$?

$$|[u,v,w]|=Vol_{u,v,w}=0$$



$Vol = b \times h = 0$

$\to$ $b=0 \leftrightarrow$ lo vectores que "forman" la base son linealmente dependientes

$\to$ $h=0 \leftrightarrow$ El vector que determina la altura esta dentro del espacio $\langle u,v\rangle$ $\therefore$ Es l.d. con u, v.

u, v, w son lineal.. dependientes

2) Calcule el volumen del paralelepípedo definido por u, v y w

a) $u=(-1,2,1)$, $v=(4,3,1)$ y $w=(-3,-5,-2)$

$$[u,v,w]=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -1(-6-(-5))-2(-8-(-3))+1(-20-(-9))$$

$$=-1(-1)-2(-5)+1(-11)$$

$$=1+10-11=0$$

$$Vol_{u,v,w}=0$$

b) $u=(-1,2,1)$, $v=(4,3,1)$ y $w=(-3,-5,0)$

$$[u,v,w]=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -1(0-(-5))-(2)(0-(-3))+1(-20-(-9))$$

$$=-1(5)-2(3)+1(-11)$$

$$=-5-6-11=-22$$

$$Vol_{u,v,w}=|-22|=22 \quad u^3$$

- Imágenes creadas con Bitmoji

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World