Lista de ejercicios de práctica

Unidad 3: Espacios Vectoriales.
Geometría Analítica I

Facultad de Ciencias
Profesor: Arilín Haro.Ejercicios seleccionados por: Antonio Romero y Álvaro Cruz.

Instrucciones

Sip, tal como te lo andas sospechando. La recomendación es leer con cuidado y tratar de resolver cada ejercicio según vayas viendo el material de cada tema. ¡Éxito!

1. ¿Qué es un espacio vectorial?

1. Enuncia las 10 propiedades de espacio vectorial y explícalas con tus propias palabras.

2. Indica si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre los números reales:

   a) Los números naturales (los que usamos en este curso).

   b) Las rectas $\mathcal{L} := \{ax + by + c = 0 \mid c = 0\}$

   c) Los planos del espacio que no pasan por el origen.

   d) Los vectores de $\mathbb{R}^4$

   e) Los polinomios de segundo grado con coeficientes en los reales $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}) := \{a_0 + a_1x + a_2x^2\}$

   f) Los polinomios de quinto grado con coeficientes en los naturales (de este curso) $\mathcal{P}^5(\mathbb{N}) := \{a_0 + a_1x + ... + a_5x^5\}$

   g) Las matrices de 2×1 con coeficientes en los racionales $\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{Q})$.

   h) Las matrices de 3×3 con coeficientes en los irracionales $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{I})$.

   i) Las funciones del intervalo $[0, 1]$ a los reales $\mathbb{R}$, es decir, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

   j) Las funciones no nulas que van de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, o sea, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Elige tres elementos del espacio vectorial y comprueba las propiedades de espacio vectorial con ellos.

4. En el ejemplo, anterior, si tomamos tres vectores de la forma $(x, 0)$ (con $x \in \mathbb{R}$), ¿También formarán un espacio vectorial)? Y si tomamos todos los vectores de esa forma, ¿Podría decirse que forman un espacio vectorial? ¿Qué le faltaría/le quitaría para que fuese un espacio vectorial?

5. Consideremos el conjunto de las matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{pmatrix}$$

   Con las $x_{i,j} \in \mathbb{R}$. ¿Forman un espacio vectorial? ¿Por qué?

6. Ahora consideremos el conjunto de las matrices de la forma $\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R})$ en unión con las matrices $\mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$. ¿$\mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) \cup \mathcal{M}_{3\times2}(\mathbb{R})$ forma un espacio vectorial? ¿Qué cambiaríamos para que fuera un espacio vectorial?

7. Determina si el conjunto dado es un espacio vectorial. Si no es así, dé al menos un axioma que no sea satisfecho. A menos que se indique lo contrario, suponga que la suma de vectores y la multiplicación escalar son las operaciones ordinarias definidas en el conjunto:

   a) El conjunto de vectores $\{ax + by + c = 0 \mid c = 0\}$

   b) El conjunto de vectores $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ con multiplicación escalar definida por $k(a, b) = (ka, 0)$.

   c) El conjunto de números reales, con la suma definida por $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ = x - y.

   d) El conjunto $\mathbb{R}^3$ con la operación de suma vectorial $\oplus$ definida por $(a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1 + 5, a_2 + b_2 - 7, a_3 + b_3 + 1)$ y multiplicación escalar definida por $c \odot (a_1, a_2, a_3) = (ca_1 + 5(c-1), ca_2 - 7(c-1), ca_3 + c - 1)$.

8. Sea V un espacio vectorial. Muestra que el vector cero $0 \in V$ es único.

9. Suponga que V es un espacio vectorial y que $u, v, w \in V$. Demuestre que si $w + u = w + v$, entonces $u = v$.

10. Suponga que V es un espacio vectorial, $u, v \in V$ y α es un escalar distinto de cero en $\mathbb{R}$. Pruebe que si $\alpha u = \alpha v$, entonces $u = v$

2. ¿Son las matrices un espacio vectorial?

1. Los vectores son un subconjunto particular de las matrices, y también pueden anotarse como "vectores columna", muy útiles para fines de producto entre matrices, producto punto, entre otros. Demuestra que:

   a) Las matrices de 1×2 con coeficientes reales (denotadas como $\mathcal{M}_{1\times2}(\mathbb{R})$) conforman un espacio vectorial. Estos son los vectores estándar del plano euclidiano, predeterminadamente.

   b) Las matrices de 2×1 con coeficientes reales (denotadas como $\mathcal{M}_{2\times1}(\mathbb{R})$) conforman un espacio vectorial. Estos son los vectores columna del plano euclidiano.

c) Que el conjunto únicamente conformado por el vector $(0,0,0)$ es un espacio vectorial.

d) ¿Es el conjunto conformado por los vectores $A := \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R};\ x > 0, y > 0\}$ forma un espacio vectorial?

e) ¿Es el conjunto conformado por los vectores $B := \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R};\ x \geq 0\}$ forma un espacio vectorial?

2. Demuestra que el conjunto de las matrices de 3×2 con coeficientes en los reales $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

3. Si en el conjunto anterior fijamos la entrada $x_{3,2} = 0$, ¿Seguirá siendo un espacio vectorial? ¿Por qué o por qué no?

4. En general, ¿Cuándo podemos decir que un espacio de matrices de $m \times n$ con coeficientes en los reales($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$) es espacio vectorial?

5. ¿Cuándo podemos asegurar que la unión de dos espacios de matrices $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{R})$ forman un espacio vectorial?

6. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcule las siguientes operaciones matriciales:

a) $3A$

b) $A + B$

c) $C - D$

d) $4A - 2B$

e) AB

f) A^2

g) $(2A - B)D$

7. Considere los siguientes vectores fila y columna: $x = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Obtenga los productos matriciales xy y yx.

8. Encuentre los valores x, y, z, t para el cual se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} x + y & 2z + t \\ x - y & z - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

9. La transpuesta de una matriz A, escrita A^t, es la matriz obtenida escribiendo las columnas de A, en orden, como filas. En otras palabras, si $A = [a_{ij}]$ es una matriz $m \times n$, entonces $A^t = [b_{ij}]$ es la matriz $m \times m$ donde $b_{ij} = a_{ji}$. Encuentre la transpuesta de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

10. Considere las siguientes matrices y resuelva:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Para una matriz $A = [a_{ij}]$ cuadrada (es decir de dimensión $n \times n$), se define la traza de A como la suma de sus elementos en la diagonal:

   $$tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$$

   Obtenga $tr(M), tr(N)$.

   b) Muestre que $MN = NM = I$ donde I es la matriz de identidad.

3. Subespacio vectorial.

1. Sea V un espacio vectorial y $W \subseteq V$. Muestra que W es un subespacio vectorial si y solo si cumplen las siguientes condiciones:

   ✓ $0 \in W$

   ✓ $u, v \in W \Rightarrow u + v \in W$

   ✓ $u \in W$, $k \in K$ (k un escalar del campo K), $\Rightarrow ku \in W$

2. Determina si el subconjunto indicado es o no un subespacio del espacio vectorial indicado:

   a) La recta $y = 2x$ en $\mathbb{R}^2$.

   b) El conjunto $W_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \geq 0\}$.

   c) El conjunto $W_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$.

   d) El conjunto $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 3z; x - y = 0\}$.

   e) El conjunto $W_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z = t; x + y = 2t - 1\}$.

3. Dado el conjunto $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid ax + y = bz; bx - 2y + a = t - b\}$, calcula la relación entre los parámetros reales a y b para que sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

4. Sea V un espacio vectorial. Demuestre que la intersección de cualquier número de subespacios de V es un subespacio de V.

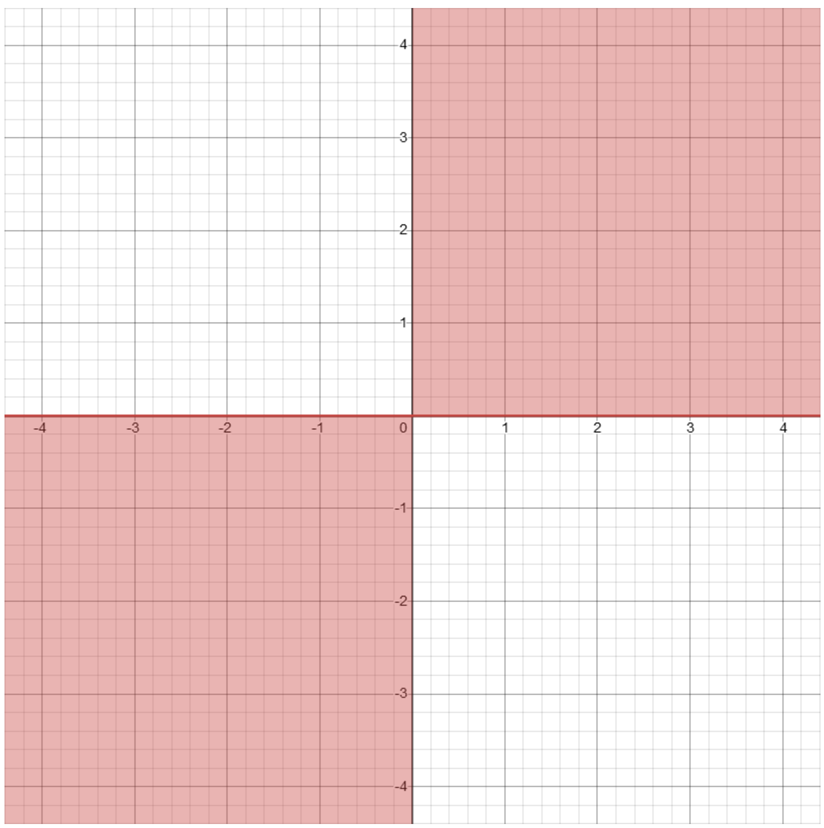
5. Sea V el espacio vectorial de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demuestre que W es un subespacio de V, donde:

   a) $W = \{f(x) \mid f(1) = 0\}$, todas las funciones que, al evaluar 1, resulta 0.

   b) $W = \{f(x) \mid f(3) = f(1)\}$, todas las funciones que al evaluar en 1 es igual que evaluar en 3.

   c) $W = \{f(x) \mid f(-x) = -f(x)\}$, todas las funciones impares.

6. Determina si el espacio sombreado con rojo (incluidos los ejes X e Y) forma un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.



7. Consideremos al vector $(2, 1)$ del plano euclidiano. Decimos que la recta generada por el vector son todas las combinaciones lineales de tal vector, y genera una recta que va en dirección del vector en cuestión. Indica si la recta generada por el vector $(2, 1)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

8. Consideremos la recta generada por el vector $(1, -2)$ y la recta generada por el $(3, 1)$. ¿Entre ambas forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

9. El punto del espacio $(0,0,0)$, ¿Forma un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

10. El hiperespacio $\mathbb{R}^5$ sin el origen, ¿Forma un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

11. Consideremos el conjunto de los números racionales con coeficientes en los números racionales. ¿Forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$?

12. Consideremos las matrices de 2×3 con coeficientes en los enteros. ¿Forman un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$?

4. Dependencia e Independencia Lineal.

1. Indique los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes:

   a) $A = \{(-2,1,0,1),(0,1,-2,0),(0,3,-2,-1),(1,0,1,-1)\}$
   b) $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(4,5,0)\}$
   c) $C = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
   d) $D = \{(1,1,0),(1,3,2),(4,9,5)\}$
   e) $E = \{(2,2),(2,1)\}$

2. Considera el espacio vectorial de todas las funciones de una variable t. Mostrar que las siguientes funciones son linealmente independientes:

   a) $\{t, e^t\}$
   b) $\{t, sen(t)\}$
   c) $\{sen(t), sen(2t)\}$

3. Suponga que los vectores u, v, w son linealmente independientes. Demuestre que los vectores $u+v$, $u-v$ y $u-2v+w$ también son linealmente independientes.

4. Demuestra que el conjunto $\mathcal{L} := \{t(-1,2) \mid t \in \mathbb{R}\}$ forma un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$. A esta expresión de la recta se le llama "forma paramétrica de la recta", pues el parámetro es la t.

5. Consideremos los vectores $(1,-1)$ y $(1,1)$. Obtener escalares λ_i y μ_i tales que $\lambda(1,-1)+\mu(1,1)$, para que podamos llegar a los siguientes vectores:

   a) $\lambda_1(1,-1)+\mu_1(1,1) = (1,-1/2)$
   b) $\lambda_2(1,-1)+\mu_2(1,1) = (-3,5/4)$
   c) $\lambda_3(1,-1)+\mu_3(1,1) = (-10,0)$
   d) $\lambda_4(1,-1)+\mu_4(1,1) = (11,\pi)$
   e) $\lambda_5(1,-1)+\mu_5(1,1) = (0,0)$

f) ¿Podrías decir que se puede llegar a cualquier vector del plano euclidiano mediante combinaciones lineales de estos vectores (los $(1,-1)$ y $(1,1)$)?

6. Repite el ejercicio anterior, pero con los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$. Estos son llamados "vectores canónicos".

7. Sea el conjunto de vectores $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2x^3\}$. Demuestra que los siguientes polinomios son combinaciones lineales de este conjunto de vectores.

   a) $P_1(x) = 2 - x + \frac{1}{2}x^3$
   b) $P_2(x) = -\frac{3}{4} - x^2 + 3x^3$
   c) $P_3(x) = 21 - x - x^2 - x^3$
   d) $P_4(x) = -ex^3$
   e) $P_4(x) = 1 + 2x$

8. Expresa los polinomios de los subincisos anteriores como combinaciones lineales del conjunto de vectores $\{1, x, x^2, x^3\}$

9. Considera las matrices de 2×2 siguientes:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

   Mediante combinaciones lineales, llega a las matrices siguientes:

$$a)\begin{pmatrix}-2 & \frac{1}{3}\\-6 & -\frac{3}{4}\end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix}1 & 10\\-\frac{3}{5} & -8\end{pmatrix} \quad c)\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -1\\1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

10. Haz lo mismo, pero ahora con las matrices:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

   Esta es llamada "base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$".

5. Bases de un espacio vectorial.

1. Usa el conjunto de vectores $\{(0,0,1), (1,0,1), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ para llegar a los vectores canónicos [de $\mathbb{R}^3$] y viceversa. Esta conversión, en la que pasamos de una base a otra mediante combinaciones lineales, se llama "transformación canónica", y es muy recurrente en álgebra lineal y temas selectos de matemática computacional.

2. Pasa de la base de los $\mathcal{P}^5(\mathbb{R})$ descrita como $\{1+x-x^2+x^3-x^4+x^5, 1+x-x^2+x^3-x^4, 1+x-x^2+x^3, 1+x-x^2, 1+x, 1\}$ a la base canónica $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$.

3. Transforma las matrices de 2×3:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & 2 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

A la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y viceversa.

4. Demostrar que $s = \{(1,2,1),(2,0,1),(1,0,1)\}$ es un sistema generador del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.

5. Describe geométricamente los siguientes siguientes conjuntos:

   a) El subespacio generado de $\mathbb{R}^4$ por el vector (2,3,-1,4)
   b) El subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por (1,2,3) y (2,3,-1).
   c) El subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por (1,0,0) y (0,1,0).

Determine si el conjunto de vectores es una base de cada espacio vectorial correspondiente:

1. $A = \{(1,1),(-1,2)\}$ en $\mathbb{R}^2$
2. $B = \{(-1,3,2),(2,-4,-3),(-3,8,2)\}$ en $\mathbb{R}^3$
3. $C = \{1+2x+x^2, 3+x^2, x+x^2\}$ en $\mathbb{R}^3$
4. $D = \{(1,2,-1,0),(0,1,0,1),(-1,-5,2,0),(2,3,-2,7)\}$ en $\mathbb{R}^4$

6. Producto punto.

1. El producto punto es una operación algebraica que opera a dos vectores de igual dimensión para que resulte en un escalar. El producto punto que se usará en esta sección será:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$$

   Siendo así, realice los siguientes ejercicios:

   a) $(15,-2,4)\cdot(1,3,-1)$
   b) $(-1,2)\cdot(1,-1)$
   c) $(5,-1,2)\cdot(1,1,-1)$
   d) $(-1,3,1)\cdot(-2,-3,-7)$

e) $||(2,3,-1/2)||$

f) $||(2,10)||$

g) $u \cdot v$ donde $u = (\sqrt{3}, -315, 22)$ y $v = u/||u||$

2. Normaliza los vectores enlistados y halla dos vectores tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, siendo $\vec{u}$ un vector enlistado.

   a) $(1,3)$

   b) $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$

   c) (a,b)

   d) $(1,-1,-2)$

   e) $(-\frac{1}{3}, -2, 1)$

   f) (a,b,c)

3. Observa los vectores (a,b) y (a,b,c) y al vector ortogonal que encontraste a cada uno de ellos. ¿Será cierto que cualquier combinación lineal de esos vectores ortogonales [que encontraste] es ortogonal? Demuéstralo o da un contraejemplo.

4. Hallar la proyección ortogonal de los siguientes pares de vectores:

   a) $\vec{u} = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$, $\vec{v} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$

   b) $\vec{u} = -4\hat{\imath} + 7\hat{\jmath}$, $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$

   c) $\vec{u} = -3\hat{\imath} - 2\hat{k}$, $\vec{v} = -2\hat{\jmath} - 4\hat{k}$

   d) $\vec{u} = (4,4,0)$, $\vec{v} = (0,4,1)$

5. ¿Qué significa que la proyección ortogonal de un vector sobre otro sea:

   a) menor que 0?

   b) igual a 0?

   c) mayor que 0?

6. Halla el área de los triángulos con dos lados representados por los vectores:

   a) $\vec{u} = 4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

   b) $\vec{u} = 2\hat{\imath} + 4\hat{\jmath}$ y $\vec{v} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$

7. Hallar el ángulo entre los siguientes pares de vectores:

   a) (1,1,1) y (1,1,-1)

   b) (2,1) y (2,-4)

   c) (-1,0,3) y (0,4,0)

d) (-1,2,-3) y (-1,-3,4)

e) (-$\sqrt{5}$, 1,0) y (1, $\sqrt{5}$,-3)

8. Una fuerza **F** de 5N (newtons) forma un ángulo de $\pi/4$ radianes con el eje y, y apunta a la derecha. La fuerza actúa en contra del movimiento de un objeto que se mueve a lo largo de la recta que une (1,2) y (5,4).

   a) Hallar una expresión (x,y) de **F**.

   b) Hallar el ángulo que forma la dirección del desplazamiento $\mathbf{D} = (4, 2)$ y la dirección de **F**.

   c) El trabajo realizado es **W=F·D** o equivalentemente, $||\mathbf{F}||||\mathbf{D}||cos\theta$. Obtenga el trabajo con ambas expresiones.

9. Un camión de 23 toneladas está estacionado en una bajadita de 5º de inclinación (desde el eje X positivo). Considerando únicamente la fuerza de gravedad, encuentra:

   a) La componente del peso del camión que arrastra al camión al pie de la bajadita.

   b) La componente del peso del camión que es perpendicular a la bajadita.

   c) La magnitud de la fuerza que se necesita para que el camión no resbale.

   d) La magnitud de la fuerza que perpendicular al camino.

10. Dos fuerzas $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ están representados como vectores que inician en el origen. La primera fuerza tiene una magnitud de $20lb$ y pasa por $(1, 1, 0)$. La segunda fuerza tiene una magnitud de $40lb$ y pasa por $(0, 1, 1)$. Sea $\vec{F}$ la fuerza resultante de $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$.

    a) Halla la magnitud de $\vec{F}$.

    b) Determina los ángulos directores de $\vec{F}$.

7. Determinantes: Cálculo y Propiedades.

1. Demostrar que los determinantes de las siguientes matrices valen 0.

$$A)\begin{pmatrix}1 & a & b+c\\ 1 & b & a+c\\ 1 & c & a+b\end{pmatrix} \qquad B)\begin{pmatrix}a & 3a & 4a\\ a & 5a & 6a\\ a & 7a & 8a\end{pmatrix}$$

2. Si la matriz A es tal que:

$$A)\begin{pmatrix}x & y & z\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Calcula los determinantes de B y C si:

$$B)\begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C)\begin{pmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{pmatrix}$$

3. Calcular los determinantes de las siguientes matrices usando propiedades de determinantes:

$$A)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{pmatrix}$$

4. Mediante el método de cofactores y la regla de Sarrus (matriz de 3x3), calcule el determinante de las siguientes matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

5. Demuestra, mediante cálculo directo, las siguientes igualdades:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{2}$$

6. Sean $\mathbf{a} = (a_, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ vectores no paralelos en $\mathbb{R}^2$. Ambos vectores forman 2 lados de un paralelogramo con el origen como vértice común. Muestra que el área del paralelogramo formado es el valor absoluto de la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

7. Halle el área del paralelogramo de $\mathbb{R}^2$ con vértices (1,1), (2,3), (2,1),(3,3).

8. Resolver las siguientes ecuaciones sin desarrollar los determinantes:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad b)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

8. Producto cruz (Producto vectorial).

1. Calcular el producto cruz de los siguientes:

   a) (3, -1, 1)$\times$(1, 2, -1)
   b) (2, -1, 3)$\times$(1, 2, 0)
   c) (-1, 2, 4)$\times$(2, -4, -8)
   d) (2, -3, 5)$\times$(4, -5, 1)

2. Muestre que para dos vectores **u,v** en $\mathbb{R}^3$:

$$||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \tag{3}$$

   Esta es conocida como “identidad de LaGrange”. Hint: Use las expresiones del producto cruz y punto que relacionan el ángulo θ entre ambos vectores, es decir, $||\mathbf{u} \times \mathbf{v}|| = ||\mathbf{u}||||\mathbf{v}||sen\theta$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||cos\theta$.

3. Halle un vector perpendicular a las siguientes pares de vectores:

   a) (2,1,1), (1,2,3)
   b) (1,-2,1), (2,1,1)
   c) Un vector perpendicular unitario a los vectores $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

4. Determina un número real λ tal que $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\hat{i}$ sean ortogonales ($\vec{u} = (3, 1, -5)$ y $\vec{v} = (4, -2, \lambda)$).

5. Demuestra que, para cualesquiera vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos, $\vec{u} \times \vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

6. Prueba que $\vec{v} \times \vec{u}$ es ortogonal a $(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{u}$, siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos.

7. Verifica la identidad de LaGrange con los vectores $\vec{u} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ y $\vec{v} = 2\hat{i} - \hat{j}$.

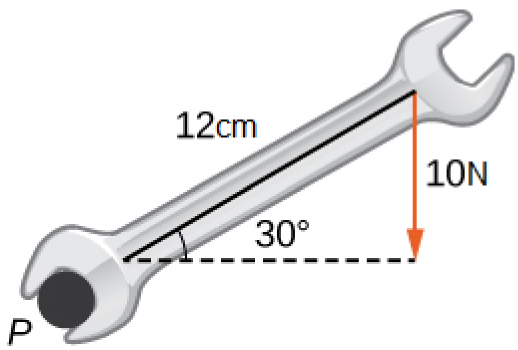
8. Obtener:

   a) El área del paralelogramo definido por los vectores (1, 2, 3) y (-1,-1, 0)
   b) El área del paralelogramo definido por los vectores (3, 1, 0) y (1, 3, 2)
   c) El área del triángulo con vértices (-1, 2, 0), (2, 1, 3) y (1, 1, -1)
   d) El área del triángulo con vértices (3, 1, -2), (1, 4, 5) y (2, 1, -4)
   e) Considera el paralelepípedo con aristas dadas por los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$, donde $A = (2, 1, 0)$, $B = (0, 1, 2)$ y $C = (0, 1, \alpha)$.

      i) Encuentra el número real $\alpha > 0$ tal que el volumen del paralelepípedo sea de 3 unidades.

ii) Para $\alpha = 1$, halla la altura h desde el vértice C del paralelepípedo y haz un bosquejo.

9. Un ingeniero mecánico usa una llave de $12cm$ para tornar una tuerca. La llave hace un ángulo de 30º con la horizontal. Si el mecánico aplica una fuerza de $10N$ en el mango de la llave, ¿Cuál es la magnitud de la torca en el punto P?
Hint: El trabajo es definido como $W = \vec{F} \times \vec{d}$.



10. El vector de fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un protón (con carga eléctrica de $1{,}6 \times 10^{-19}C$) se mueve a lo largo de un campo magnético $\vec{B}$, donde el vector velocidad $\vec{v}$ se da por:
$$\vec{F} = (1{,}6 \times 10^{-19}C)(\vec{v} \times \vec{B})$$
Determina la fuerza que se ejerce sobre un protón que se mueve en el plano XY a una velocidad $\vec{v} = 10^5\hat{i} + 10^5\hat{j}$ bajo un campo magnético de $\vec{B} = 0{,}3\hat{j}$.
Las unidades son $[\vec{v}] = m/s$, $[\vec{B}] = T$ y $[\vec{F}] = N$.

9. Producto triple de vectores.

1. Calcula los triples productos escalares de:

   a) $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}$ y $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$, siendo $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (7,6,9)$ y $\vec{w} = (4,2,7)$.

   b) $\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$ y $\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$, con $\vec{u} = (4,2,-1)$, $\vec{v} = (2,5,-3)$ y $\vec{w} = (9,5,-10)$.

2. Considera los vectores $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (0,1,1)$ y $\vec{w} = (1,1,0)$. Calcula:

   a) $\vec{u} \times \vec{v}$

   b) $\vec{v} \times \vec{w}$

   c) $\vec{w} \times \vec{u}$

   d) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{w} \times \vec{u})$

e) $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot[(\vec{v}\times\vec{w})\times(\vec{w}\times\vec{u})]$, que también puede escribirse como $[\vec{u}\times\vec{v},\vec{v}\times\vec{w},\vec{w}\times\vec{u}]$.

f) $\vec{u}\times\vec{v}\times\vec{w}$, siendo $\vec{u}=(2,1,3)$, $\vec{v}=(1,2,3)$ y $\vec{w}=(-1,-1,0)$.

3. Determina el valor de k para que el producto mixto de los vectores sea:

    a) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=23$, si $\vec{u}=(3,-2,1)$, $\vec{v}=(1,k,k)$ y $\vec{w}=(2,-1,3)$.

    b) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=-4$, si $\vec{u}=(-1,1,k-2)$, $\vec{v}=(2,2,-2)$ y $\vec{w}=(1,3-k,-1)$.

4. Calcula los valores de x e y para que los vectores $\vec{u}=(1,2,x)$ y $\vec{v}=(2,2,y)$ sean ortogonales, y para que el producto mixto con $\vec{w}=(3,4,-2)$ sea tal que $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=2$.

5. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de $\pi/6$, y el vector $\vec{w}$ es perpendicular a ambos. Calcula el producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ si los módulos de los vectores son $||\vec{u}||=6$ y $||\vec{v}||=||\vec{w}||=3$.

6. Halle el volumen del paralelepípedo definido por cada tríada:

    a) (1, 3, 0), (2, 1, -2), (5, 0, 4)

    b) (4, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 2, 3)

    c) (2, 1, -1), (5, 0, -3), (1, -2, 1)

    d) (3,-2,5), (2,2,-1), (-4,3,2)

    e) Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos (3,2,1), (1,2,4), (4,0,3) y (1,1,7).

7. Demuestre las siguientes identidades del triple producto vectorial:

    a) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

    b) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

    c) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) \iff (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=\vec{0}$

8. Sean $A=(-3,4,0)$, $B=(3,6,3)$, y $C=(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo.

    a) Calcular cada ángulo del triángulo.

    b) Calcular el área del triángulo.