Rectas en $\mathbb{R}^n$

+ Ecuación paramétrica
+ Recta que pasa por dos puntos
+ ¿Ecuaciones simultáneas?

Arilin's Math World

Ecuación paramétrica de la recta en $\mathbb{R}^n$

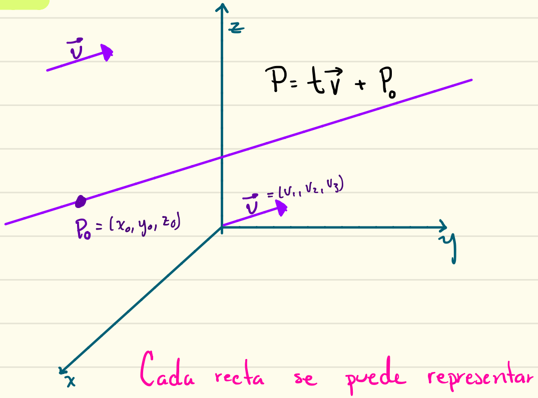
Un punto $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ estará en la recta si es de la forma:

$$\boxed{P = t\vec{v} + P_0}$$

t es un parametro que corre sobre $\mathbb{R}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ es un vector dirección

$P_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ es un punto en la recta



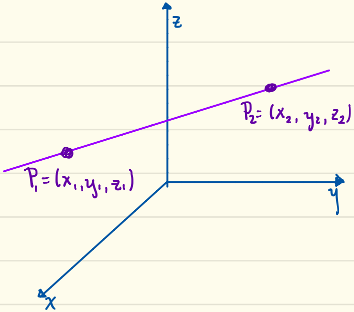
Cada recta se puede representar con una infinidad de ecuaciones.

¿Cómo saber si las ecuaciones L: $P = t_1\vec{v} + P_0$ y W: $P = t_2\vec{u} + Q$ representan a la misma recta?

L y W son la misma recta si:

- $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son uno múltiplo del otro
  Por ejemplo $u = (-1, 2, 1)$ y $w = (7, -14, -7)$
- Tienen algún punto en común.
  Por ejemplo: P_0 es un punto en la recta W.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos P_1 y P_2 .



$$P = t\vec{v} + P_0$$

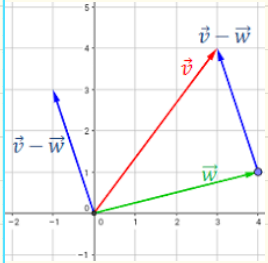
$$\vec{v} = \overrightarrow{P_2 - P_1}$$

A partir de los dos puntos en la recta construiremos una ecuación paramétrica.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$P = t(P_2 - P_1) + P_1$$

Para construir un vector dirección recordamos que la diferencia de vectores es el vector que me lleva de uno al otro.



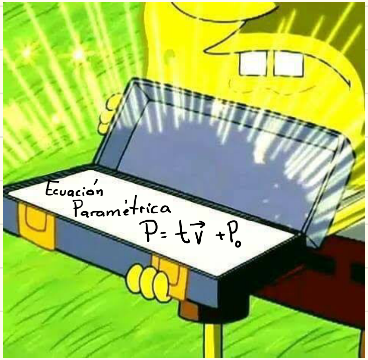
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos en $\mathbb{R}^n$

$$P = t(\overrightarrow{P_2 - P_1}) + P_1$$

Esta ecuación se vería así:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

donde $P_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $P_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ son los dos puntos en la recta.



¿Ecuaciones simultáneas para describir una recta?

Sí, porque sólo una ecuación lineal ya no basta

Recordemos la ecuación paramétrica $P = t\vec{v} + P_0$

En $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x &= t v_1 + x_0 \\ y &= t v_2 + y_0 \\ z &= t v_3 + z_0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} t &= \frac{x - x_0}{v_1} \\ t &= \frac{y - y_0}{v_2} \\ t &= \frac{z - z_0}{v_3} \end{aligned} \rightarrow \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

En $\mathbb{R}^n$

$$P = t\vec{v} + P_0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= t v_1 + a_1 \\ x_2 &= t v_2 + a_2 \\ &\vdots \\ x_n &= t v_n + a_n \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} t &= \frac{x_1 - a_1}{v_1} \\ t &= \frac{x_2 - a_2}{v_2} \\ &\vdots \\ t &= \frac{x_n - a_n}{v_n} \end{aligned} \rightarrow \frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{v_n}$$

Ejercicios

1) Encontrar las ecuaciones, paramétrica y simultaneas, de la recta que:

a) Pasa por los puntos (7,5,9,2) y (8,3,11,5).

b) Tiene dirección (-2,3,4,-1,-2) y pasa por el punto (0,1,-1,3, 2).

2) Diga si las rectas L y M se interscan o no

a)
$$\begin{cases} L: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ M: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ M: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Soluciones →

Ejercicios

Soluciones

1) Encontrar las ecuaciones, paramétrica y simultaneas, de la recta que:

a) Pasa por los puntos $\underbrace{(7,5,9,2)}_{P_1}$ y $\underbrace{(8,3,11,5)}_{P_2}$.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos en $\mathbb{R}^n$
$$P = t(\overrightarrow{P_2 - P_1}) + P_1$$

$$P = t\left[\begin{pmatrix}8\\3\\11\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}7\\5\\9\\2\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}7\\5\\9\\2\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\boxed{P = t\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\5\\9\\2\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\frac{x_1 - 7}{1} = \frac{x_2 - 5}{-2} = \frac{x_3 - 9}{2} = \frac{x_4 - 2}{3}}$$

b) Tiene dirección $\underbrace{(-2,3,4,-1,-2)}_{V}$ y pasa por el punto $\underbrace{(0,1,-1,3,2)}_{P_0}$.

$$P = t\vec{v} + P_0$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-2\\3\\4\\-1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\\2\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\frac{x_1 - 0}{-2} = \frac{x_2 - 1}{3} = \frac{x_3 + 1}{4} = \frac{x_4 - 3}{-1} = \frac{x_5 - 2}{-2}}$$

2) Diga si las rectas L y M se intersecan o no

$P = t\vec{v} + P_0$

a)
$$L: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\0\\2\\3\end{pmatrix}$$
$$M: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\0\\2\\3\end{pmatrix}$$

Comparten el punto $\begin{pmatrix}7\\0\\2\\3\end{pmatrix}$

b)
$$L: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}$$
$$M: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}$$

x: $t(1) + 4 = s(-2) + 8$

y: $t(0) + 5 = s(5) + 0$

z: $t(2) + 0 = s(2) + 2$

$t + 4 = -2s + 8$

$5 = 5s \rightarrow s = 1$

$2t = 2s + 2 \rightarrow 2t = 2(1) + 2 = 2t = 2 + 2 = 4 \rightarrow t = \frac{4}{2} = 2$

si $t = 2$ en L obtengo $2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}$

si $s = 1$ en M obtengo $1\begin{pmatrix}-2\\5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Si se intersectan en } \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix}}$$

- Imágenes creadas con Bitmoji

- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World

- Recuerda visitar:
  * mi canal Arilin's Math y
  * mi grupo de Facebook Arilin's Math World.