Temas de rectas en el espacio

+ ¿cómo se relacionan dos rectas en el espacio?
+ distancia entre un punto y una recta
+ distancia entre dos rectas

Arilin's Math World

¿Cuáles son las opciones para dos rectas L y M en el espacio?

$L = t\vec{v} + P \qquad W = t\vec{w} + Q$

L y M
Rectas en $\mathbb{R}^3$

$L \cap M = \emptyset$ (No comparten ningun punto)

- Son paralelas
  Misma dirección
  $\vec{v} = \lambda \vec{w}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$
  $P \neq t\vec{w} + Q$ para todo $t \in \mathbb{R}$

- No son paralelas, ni se tocan
  rectas que se cruzan ~!!
  $\vec{v} \neq \lambda \vec{w}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
  $P \neq t\vec{w} + Q$ para todo $t \in \mathbb{R}$

$L \cap M \neq \emptyset$ (Si comparten puntos)

- Se intersectan en un punto
  $\vec{v} \neq \lambda \vec{w}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
  $\exists!\ t \in \mathbb{R}$ tal que $t\vec{v} + P \in M$.

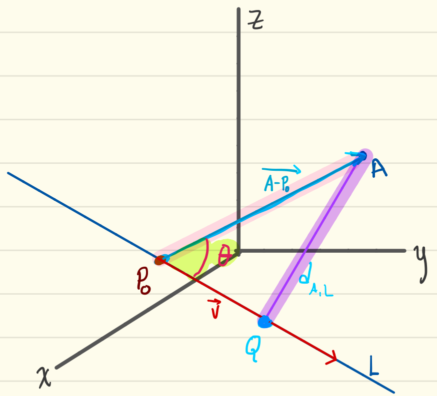
- Se intersectan en más de un punto
  $L = M$
  $\vec{v} = \lambda \vec{w}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$
  $P = t\vec{w} + Q$ para algún $t \in \mathbb{R}$

Distancia entre una recta y un punto

L A

Recta: $L=\{ P = t\vec{v} + P_0 \mid t\in\mathbb{R}\}$ punto A

Parámetro dirección Punto en la recta



La distancia entre L y A es la longitud del segmento que une a L con A y es perpendicular a L. De acuerdo con el dibujo $d_{A,L}=d_{A,Q}$ es a longitud del cateto opuesto a θ en el triángulo A, P_0, Q. Es decir:

$$d_{A,L} = d_{A,Q} = \|A-P_0\|\,|\mathrm{Sen}\,\theta|$$

Ahora recordemos la propiedad del producto cruz

$$\|u\times v\| = \|u\|\,\|v\|\,|\mathrm{Sen}\,\theta|$$

donde θ es el ángulo entre u y v,

y sustituimos $u = \overrightarrow{A-P_0}$ para obtener

$$\|\overrightarrow{A-P_0}\times\vec{v}\| = \|\overrightarrow{A-P_0}\|\,\|\vec{v}\|\,|\mathrm{Sen}\,\theta|$$

despejando $|\mathrm{Sen}\,\theta|$ obtenemos

$$|\mathrm{Sen}\,\theta| = \frac{\|\overrightarrow{A-P_0}\times\vec{v}\|}{\|\overrightarrow{A-P_0}\|\,\|\vec{v}\|}$$

Ahora sustituimos el valor de $|\mathrm{Sen}\,\theta|$ en la ecuación $d_{L,A} = \|\overrightarrow{A-P_0}\|\,|\mathrm{Sen}\,\theta|$ y hacemos las cuentas.

$$d_{L,A} = \|\overrightarrow{A-P_0}\|\,|\mathrm{Sen}\,\theta| = \frac{\cancel{\|\overrightarrow{A-P_0}\|}\,\|\overrightarrow{A-P_0}\times\vec{v}\|}{\cancel{\|\overrightarrow{A-P_0}\|}\,\|\vec{v}\|}$$

Por lo tanto

$$d_{A,L} = \frac{\|\overrightarrow{A-P_0}\times\vec{v}\|}{\|V\|}$$

Distancia entre una recta y un punto

L A

Ejemplo.

Calcular la distancia entre la recta dada por la ecuación $P = t\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix}$ y el punto $A = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

V P_0

Fórmula

$$d_{A,L} = \frac{\|\overrightarrow{A-P_0} \times \vec{V}\|}{\|V\|}$$

Solución

① $A - P_0 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-8\\-2\end{pmatrix}$

② $\overrightarrow{A-P_0} \times \vec{V}$

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -8 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = i(-40-4) - j(5-(-2)) + k(-2-(-8))$$

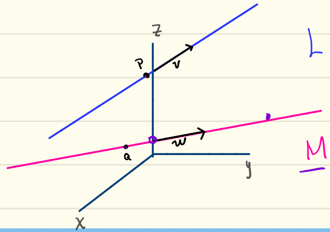
$$= i(-44) - j(3) + k(-6) = (-44, -3, 6)$$

③ $\|\overline{A-P_0} \times \overline{V}\| = \sqrt{(-44)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{1936 + 9 + 36} = \sqrt{1981}$

④ $\|V\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$

⑤ $d_{A,L} = \dfrac{\sqrt{1981}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\dfrac{1981}{30}} \approx 8.12$

Distancia entre dos rectas en el espacio

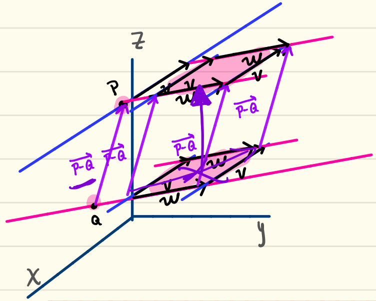


$L = t_1 \vec{v} + P$

$M = t_2 \vec{w} + Q$

Queremos la distancia mínima entre los puntos de L y los puntos de M. Es decir, la longitud del segmento más pequeño que vaya de la recta L a la recta M.
Sabemos que el segmento más pequeño será aquel que sea perpendicular tanto a L como a M.

① Para esto haremos un paralelepípedo cuyas caras superior e inferior esten definidas por los vectores directores v y w de las rectas L y M. El tercer vector necesario para unir la cara superior con la inferior lo obtendremos al hacer un segmento que vaya de una recta a la otra, por ejemplo el vector P-Q funciona.



② Dado que la altura del paralelepípedo es un segmento que va de la cara inferior a la cara superior y además es perpendicular a ambas caras entonces es también un segmento que va de la recta L a la recta M y es perpendicular a ambas rectas. En otras palabras la altura del paralelepípedo define la distancia entre ambas rectas.

③ De lo anterior obtenemos:

$$d_{L,M} = \text{altura del paralelepípedo}_{v,\, w,\, \vec{P-Q}}$$

$$= \frac{\text{Volumen}_{v,w,\vec{P-Q}}}{\text{área de la base}_{v,w}}$$

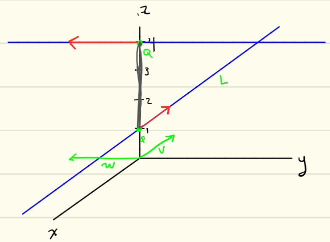
$$= \frac{\left[\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{P-Q}\right]}{\|V \times W\|}$$

Distancia entre dos rectas en el espacio

Ejemplo.

Calcular la distancia entre las rectas

$$L = t\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{v} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{P} \quad y \quad W = t\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}}_{w} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}}_{Q}$$



Solución:

① $P-Q = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-3\end{pmatrix}$

② $$[\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{P-Q}] = \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}0 & -3\\ 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$= 1\big((-3)(-3) - 0(0)\big) + 0 + 0 = 1(9-0) = 1(9) = 9$$

③ $$v \times w = \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\end{vmatrix} = i\begin{vmatrix}0 & 0\\ -3 & 0\end{vmatrix} - j\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} + k\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}$$

$$= i\big(0(0)-(-3)(0)\big) - j\big(1(0)-0(0)\big) + k\big(1(-3)-0(0)\big) = i(0-0) - j(0-0) + k(-3-0) = 0i + 0j - 3k$$

$$= (0, 0, -3)$$

④ $\|v \times w\| = \|(0,0,-3)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{0+0+9} = \sqrt{9} = 3$

⑤ $$\boxed{d_{L,M} = \frac{|[\vec{w}, \vec{v}, \overrightarrow{P-Q}]|}{\|v \times w\|} = \frac{9}{3} = 3}$$

+ Imágenes creadas con Bitmoji

+ Notas hechas por Arilín Haro, de
  Arilin's Math World