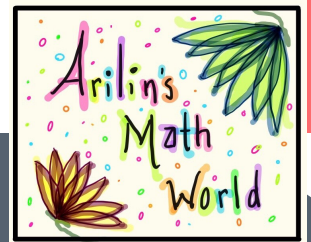


Ecuaciones de planos en el espacio

- * Ecuación paramétrica
- * Ecuación del plano que pasa por tres puntos
- * Ecuación general del plano



Ecuación paramétrica

Sabemos que un vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ genera una recta. A su vez, dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que son linealmente independientes generan un plano.

Con esto en mente tiene sentido decir que

$$P = s\vec{u} + t\vec{v} + P_0 \quad \text{con } s, t \in \mathbb{R}$$

es la ecuación del plano que pasa por el punto P_0 cuyos vectores dirección son $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Ejemplos.

1) Dar la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \text{origen} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{plano } xy$$

2) Dar la ecuación del plano paralelo al plano

yz que corta al eje x en $x=3$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para generar el plano yz

Mover el plano para que pase por $x=3$

$$P = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Dar la ecuación del plano cuyos vectores

dirección son $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 5 \end{pmatrix}$ y pasa por $\begin{pmatrix} 100 \\ -4 \\ -\pi \end{pmatrix}$

$$P = s\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ -4 \\ -\pi \end{pmatrix}$$

Ecuación del plano que pasa por tres puntos dados.

Sabemos que dos puntos diferentes definen una recta.
Luego, tres puntos no colineales definen un plano. La pregunta ahora es:

¿Cómo obtengo una ecuación a partir de los puntos P_1, P_2 y P_3 en el plano?

Empiezo por buscar un par de vectores dirección. Como P_1, P_2 y P_3 son no colineales, los vectores $\overrightarrow{P_1-P_3}$ y $\overrightarrow{P_2-P_3}$ deberán ser l.l. y general un plano paralelo al plano que pasa por P_1, P_2 y P_3 .

Lo que nos falta ahora es mover el plano generado por $\overrightarrow{P_1-P_3}$ y $\overrightarrow{P_2-P_3}$ para que pase por donde queremos.

Podemos hacer esto sumando a la ecuación $s\overrightarrow{P_1-P_3} + t\overrightarrow{P_2-P_3}$ el punto P_3 y listo.

Siendo así la ecuación del plano que pasa por los puntos P_1, P_2 y P_3 es:

$$P = s(\overrightarrow{P_1-P_3}) + t(\overrightarrow{P_2-P_3}) + P_3$$

Ejemplos

1) De la ecuación del plano que pasa por los puntos $\overset{P_1}{(12, 5, -2)}$, $\overset{P_2}{(7, -1, 4)}$ y $\overset{P_3}{(3, 2, 1)}$.

$$P = s(\overrightarrow{P_1-P_3}) + t(\overrightarrow{P_2-P_3}) + P_3 \\ = s \left[\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + t \left[\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$P = s \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) De las coordenadas de tres puntos que pertenezcan al plano

$$P = s \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- primer punto tomare' $s=t=0 \rightarrow P_1 = 0 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- segundo punto tomare' $s=1$ y $t=0 \rightarrow P_2 = 1 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
- tercer punto tomare' $s=0$ y $t=1 \rightarrow P_3 = 0 \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ecuación general del plano $\mathbb{R}^3$

Regresemos a la ecuación

$$P = s\vec{u} + t\vec{v} + P_0 \quad \text{con } s, t \in \mathbb{R}$$

y sumemos $-P_0$ en ambos lados para obtener

$$P - P_0 = s\vec{u} + t\vec{v} \quad \text{y consideremos ahora}$$

$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, multiplicando la ecuación por $\vec{n}$ obtenemos

$$\vec{n} \cdot (P - P_0) = \vec{n} \cdot (s\vec{u} + t\vec{v})$$

$$= \vec{n} \cdot (s\vec{u}) + \vec{n} \cdot (t\vec{v})$$

$$= s(\vec{n} \cdot \vec{u}) + t(\vec{n} \cdot \vec{v}) \quad \begin{array}{l} \text{Como } \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} \text{ es perpendicular} \\ \text{a } \vec{u} \text{ y a } \vec{v}. \text{ Por lo tanto} \\ \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \text{ y } \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{array}$$

$$= s(0) + t(0)$$

$$= 0$$

Digamos que $\vec{n} = (A, B, C)$ para ciertos $A, B, C \in \mathbb{R}$. De la ecuación $\vec{n} \cdot (P - P_0) = 0$ obtenemos

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \quad \text{luego}$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{donde } D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) \in \mathbb{R}$$

De las cuentas anteriores podemos notar que

$Ax + By + Cz + D = 0$ es la ecuación de un plano perpendicular al vector $\vec{n} = (A, B, C)$

Ejemplo 1)

Dar la ecuación del plano perpendicular al vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

que pasa por el punto $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Como es normal (perpendicular) a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$.

La ecuación deberá tener la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \text{en este caso } 1x + 1y + 0z + D = 0$$

Para conocer el valor de D sustituimos los valores necesarios en la ecuación: $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

$$D = -(1(-2) + 1(0) + 0(3)) = -(-2 + 0 + 0) = 2.$$

Finalmente obtengo la ecuación: $1x + 1y + 0z + 2 = 0$,

simplificando queda $x + y + 2 = 0$.

Ejercicios



Ejercicio 1

Dé la ecuación general y la ecuación paramétrica del plano perpendicular al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ y que contiene al punto $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2

Calcule la ecuación general y la ecuación paramétrica de el plano que pasa por $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y contiene al eje z .

Soluciones →

Ejercicio 1

Dé la ecuación general y la ecuación paramétrica del plano perpendicular al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y que contiene al punto $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Como es perpendicular a $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y por lo tanto $A=3, B=-3$ y $C=1$. Para calcular D utilizo al punto $P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y los valores de A, B, C.
 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = -[3(-2) + (-3)(1) + (1)(1)]$
 $= -[-6 - 3 + 1] = -[-8] = 8$

La ecuación general del plano es $Ax + By + Cz + D = 0$, en este caso $3x - 3y - z + 8 = 0$.

Para calcular la ecuación paramétrica seguiré el procedimiento de ecuación del plano que pasa por 3 puntos.

Ya sé que el plano pasa por $P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así que solo necesito otros 2 puntos. Los cuales obtendré de la ecuación general.

Si $3x - 3y - z + 8 = 0$ entonces $z = 3x - 3y + 8$.

P_1 elijo $x=y=0 \rightarrow z=3(0)-3(0)+8=8 \rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

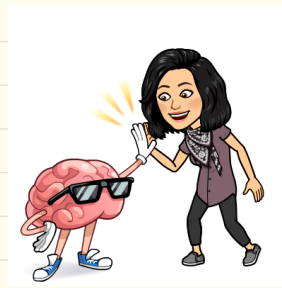
P_2 elijo $x=1$ y $y=0 \rightarrow z=3(1)-3(0)+8=3+8=11 \rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Usaré $P_3 = P_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces

$\vec{u} = P_1 - P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $\vec{v} = P_2 - P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

Por lo tanto la ecuación paramétrica del plano es

$$P = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } s, t \in \mathbb{R}.$$



Ejercicio 2

Calcule la ecuación general y la ecuación paramétrica de el plano que pasa por $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y contiene al eje z.

Dado que contiene al eje z puedo decir que:

- a) pasa por el origen pues $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un punto del eje z
- b) el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sirve como vector director $\vec{u}$

El segundo vector dirección $\vec{v}$ lo obtendré de restar al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ con el origen; puedo hacer esto pues ambos puntos pertenecen al plano.

Así $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Por lo tanto la ecuación del plano es:

$$P = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ simplificando.}$$

$$P = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ con } s, t \in \mathbb{R}.$$

Para calcular la ecuación general necesito un vector $\vec{n} = (A, B, C)$ que sea perpendicular al plano y un punto P_0 por donde pasa el plano.

Obtendré $\vec{n}$ al calcular $\vec{u} \times \vec{v}$ y utilizaré $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

¡Manos a la obra!

$$\vec{n} = (0, 0, 1) \times (-1, 2, 4) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0(4) - (2)(1)) - \hat{j}(0(4) - (-1)(1)) + \hat{k}(0(2) - (-1)(0))$$

$$= \hat{i}(-2) - \hat{j}(1) + \hat{k}(0)$$

$$= (-2, -1, 0)$$

Entonces $A = -2$, $B = -1$ y $C = 0$. Luego

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0) = -(-2(0) + (-1)(0) + 0(0)) = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación general del plano es:

$$-2x + (-1)y + 0z + 0 = 0 \text{ es decir}$$

$$-2x - y = 0 \text{ o bien } 2x + y = 0$$

AL FIN!



+ Imágenes creadas con Bitmoji

+ Notas hechas por Arilín Haro, de
Arilin's Math World

