Lista de ejercicios de práctica

Unidad 4: Rectas y planos.
Geometría Analítica I

Profesor: Arilín Haro.
Ejercicios seleccionados por:
Antonio Romero, Álvaro Cruz y Nidia Gómez.

Instrucciones

Sip, tal como te lo andas sospechando. La recomendación es leer con cuidado y tratar de resolver cada ejercicio según vayas viendo el material de cada tema. ¡Éxito!

1. Ecuaciones de la recta en el plano.

1. Obtenga la ecuación paramétrica vectorial de la recta $\mathscr{L}$ que pasa por los puntos (3,-2) y (4,4).

2. Si $\vec{v}$ es un vector de dirección de la recta $\mathscr{L}$ que contiene al punto S, entonces un punto U esta sobre $\mathscr{L}$ si y solo si $(\vec{u}-\vec{s})\cdot\vec{v}^{\perp}$. Donde $\vec{u}$, $\vec{s}$ son vectores de los puntos U y S respectivamente. Bajo esto, muestre que si L es una recta cuya ecuación paramétrica es $\vec{u}=(3,2)+r(-1,2)\ \forall r\in\mathbb{R}$, entonces el punto (6,1) no está sobre $\mathscr{L}$ pero (5,-2) si lo esta.

3. Considera al vector $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

   a) ¿Cómo denotamos todas las combinaciones lineales de ese vector?

   b) Selecciona un vector ortogonal a él.

   c) Haz el producto punto del vector ortogonal con (a,b). ¿Qué pasará si hacer el producto punto entre ese vector ortogonal y el vector que representa a todas las combinaciones lineales de (a,b)? Interpreta geométricamente.

   d) Ahora, supongamos que queremos trasladar al vector hasta el punto (c,d). ¿Cómo anotaríamos a todas las combinaciones lineales de (a,b) trasladadas al punto (c,d)? Esta manera de escribir todas esas combinaciones lineales es llamada "ecuación paramétrica de la recta".

   e) Tomando en cuenta al vector ortogonal a (a,b) y renombrándolo como (A,B), haz el producto punto con el resultado del subinciso anterior. Reescribe al vector que representa todas las combinaciones lineales de (a,b) como (x,y). Haz el cambio de variable $C=Ac+Bd$. Este resultado representa la ecuación general de la recta en $\mathbb{R}^2$.

4. Encuentra la ecuación general de la recta que pasa por S(1,4) y tiene un vector de dirección $\vec{v} = (3, -2)$.

5. Sea $\vec{v} = (h, k)$ un vector director de la recta $\mathscr{L}$ con $h \neq 0$. Si el punto (x_1, y_1) pasa por la recta $\mathscr{L}$, muestra que la ecuación paramétrica de $\mathscr{L}$ se puede escribir como:
$$\mathscr{L} := (x, y) = (x_1, y_1) + r(1, m) \qquad r \in \mathbb{R} \tag{1}$$
Donde m es la pendiente de la recta.

6. Sean $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ rectas en el plano. $\mathscr{L}_1$ es paralelo a $\mathscr{L}_2$ ($\mathscr{L}_1 \| \mathscr{L}_2$) si sus vectores de dirección son paralelos. Muestre que si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas paralelas $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ respectivamente, entonces:
$$m_1 = m_2 \tag{2}$$

7. Sean $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ rectas en el plano. $\mathscr{L}_1$ es perpendicular a $\mathscr{L}_2$ ($\mathscr{L}_1 \perp \mathscr{L}_2$) si un vector de dirección $\vec{v_1}$ de $\mathscr{L}_1$ es perpendicular a un vector de dirección $\vec{v_2}$ de $\mathscr{L}_2$. Muestre que si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas perpendiculares $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ respectivamente, entonces:
$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \tag{3}$$

8. Considere los vectores $\vec{s} = (x_1, y_1)$ y $\vec{t} = (x_2, y_2)$. Considere $r \in \mathbb{R}$ como parámetro.

   a) Escriba una ecuación perimétrica de la recta que pasa por el punto $S(x_1, y_1)$ con un vector dirección $\vec{t} - \vec{s}$.

   b) Escriba una ecuación perimétrica de la recta que pasa por el punto $S(x_1, y_1)$ con un vector dirección (h, k).

   c) Deduzca la ecuación de la recta que pasa por 2 puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$:
   $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
   Hint: Despeje r de las ecuaciones paramétricas e iguale.

   d) Muestre que si $\vec{s} = (0, b)$ (la ordenada al origen) y llamamos $m = (y_2 - y)_1/(x_2 - x_1)$, entonces la ecuación de la recta es:
   $$y = mx + b$$

   e) Finalmente, muestre que si $\vec{s} = (0, b)$ y $\vec{t} = (a, 0)$ (absica al origen), se obtiene la ecuación canónica (o simétrica) de la recta:
   $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

9. En el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, las gráficas de velocidad vs tiempo suelen ser rectas. Consideremos el caso en que la aceleración sea constante, y de magnitud $2m/s^2$, desde el tiempo $t = 0s$.

    a) Haz una gráfica de aceleración (m/s^2) vs tiempo (s), desde $t = 0s$ hasta $t = 10s$.

    b) Ahora haz una gráfica de velocidad (m/s) vs tiempo (s) en el mismo lapso de tiempo anterior, considerando que la velocidad, al tiempo $t = 0s$, es de $0m/s$.

    c) Escribe las ecuaciones paramétricas de las rectas que hiciste.

    d) Ahora anota las ecuaciones generales de tales rectas.

    e) Observa la velocidad y la pendiente de la gráfica de velocidad vs tiempo. ¿Habrá alguna relación entre ellos?

10. Una bicicleta y un mototaxi se mueven en sentidos contrarios a diferentes velocidades: la bicicleta se mueve a una velocidad constante de $0.25m/s$ y el mototaxi a -0.5m/s (el signo negativo es solamente para propósitos gráficos).

    a) Grafica el movimiento de ambos móviles en un plano de distancia vs tiempo, de 0 a 16 segundos. Considera que la mototaxi comienza su movimiento desde el punto $(16, 0)$.

    b) ¿Ambos móviles se encontrarán en algún momento? En caso positivo, da las coordenadas de su encuentro.

11. Encuentra el ángulo que forma la recta $3x - 3y = 5$ con el eje X.

12. Un fabricante de radios tiene costos fijos de 140 pesos diarios más \$72 por concepto de mano de obra y materiales por cada radio fabricado. Si cada aparato se vende en \$$107^{00}$,

    a) Escribe la ecuación que representa el costo total de producción de x radios.

    b) Escribe la ecuación que represeneta a los ingresos.

    c) ¿De qué manera garantizas que no haya ganancias y pérdidas?

    d) Dibuja la recta que represeneta el costo total y los ingresos.

    e) ¿Qué representa el punto de intersección de las rectas?

13. Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x,y) , tales que las difernecias de los cuadrados de sus distancias a dos puntos $A = (-2, -1)$ y $B = (0, 3)$, sea igual a 16.

14. Explica qué nos dice la distancia dirigida de un punto P a una recta L.

15. ¿Para que valor de a son perpendiculares las siguientes rectas?

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{-2} = 1 \qquad\qquad \frac{x}{-4} + \frac{y}{-2} = 1$$

16. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,4)tal que la distancia del origen al punto de intersección de la recta con el eje X sea igual a la distancia del origen al punto de intersección de la recta con el eje Y.

17. Un triángulo tiene vértices A(-2,6), B(-5,-1) y C(6,-2). Encuentra las pendientes de los lados y los ángulos interiores del triángulo, Dibújalo.

18. Escribe la forma normal de la ecuación de la recta que pasa por el punto P(3,8) y en la que el segmento que va de la recta al origen perpendicularmente forma un ángulo de 60^o con el eje X

19. Escribe la ecuación paramétrica de la siguiente ecuación:

$$6x - 7y + 5 = 0$$

20. Escribe en la forma general la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

    a) $x(t) = 7 - 3t$
    b) $y(t) = 4 - 2t$

2. Ecuaciones de la recta en $\mathbb{R}^n$.

1. ¿Cuántas entradas tiene un vector que vive en $\mathbb{R}^3$? ¿Cuántas tendrá uno que vive en $\mathbb{R}^5$?

2. Anota todas las combinaciones lineales de los vectores del inciso anterior.

3. Obtenga la ecuación paramétrica y simultanea de la recta que:

    a) Pasa por los puntos S(3,-1,0) y T(4,1,3)
    b) Pasa por S(2,5,-1) y tiene un vector de dirección (3,-2,2)
    c) Pasa por S(3,-1,4) y es paralela a la recta cuyas ecuaciones simultaneas son:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{4}$$

4. Sea $\mathscr{L}$ una recta cuyas ecuaciones simultaneas son equivalentes al siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x + 3z - 1 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Obtenga la ecuación simultánea original, un punto P sobre $\mathscr{L}$ y un vector paralelo a $\mathscr{L}$.

5. Muestra que las rectas definidas por las siguientes ecuaciones paramétricas son paralelas:

$$\begin{cases} x = 4 - 2s \\ y = -2 + s \\ 1 + 3s \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = \dfrac{3t}{2} \\ z = 7 + \dfrac{9t}{2} \end{cases} \tag{5}$$

6. Un meteorito viaja por el espacio y los científicos de la NASA intentan localizarlo y proyectar su trayectoria, sin embargo, los rayos cósmicos alteran las comunicaciones y no pueden seguirlo en tiempo real, pero saben que se le localizó viajando por el vector $(-2 \times 10^3, 4 \times 10^2, 5 \times 10^6)$, en coordenadas $(1{,}8 \times 10^3, 3{,}2 \times 10^2, 0)$ a un lado de Neptuno.

   a) Deduce la ecuación de la trayectoria del meteorito.

   b) Obtén la ecuación vectorial de la trayectoria del meteorito.

   c) Si quisiéramos dejar cada coordenada en términos del punto por donde pasa y del parámetro, ¿Qué ecuación obtendríamos?

   d) Desde la respuesta del subinciso anterior, obten la ecuación continua de la trayectoria del meteorito.

7. Ingresa la ecuación $x + y + z + 1 = 0$ a GeoGebra en el espacio cartesiano y responde:

   a) ¿Qué representa esa ecuación?

   b) ¿Qué se le podría modificar para que representara una recta en el espacio?

8. Físicos identifican la trayectoria de una partícula alfa (en una cámara sellada al vacío) como:

$$r = \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$$

   Quieren hacer colisionar esa partícula alfa con otras dos partículas de diferentes elementos. Si las otras dos partículas están localizadas en los puntos $A = (0, 2, 2)$ y $B = (3, 2, 6)$,

   a) ¿Se encontrarán en el camino de la partícula alfa?

   b) Halla la ecuación paramétrica de la partícula alfa.

9. Muestra que el ángulo que forman dos rectas cuyos vectores de dirección son $(-1, -1, 0)$ y $(1, 1, \sqrt{2})$ es 120°.

10. Sean puntos en el espacio A(1,2-k,-1), B(1,-1,k) y C(2,1-k,k).

   a) Encuentre el valor de k para que los 3 puntos estén alineados.

b) Obtenga la ecuación de la recta cuando los 3 puntos están alineados.

11. Halla la intersección entre la recta $\mathscr{L} : x = \lambda(2, -1, -2) + (3, 0, -1)$ y el plano $2x - y + z - 1$

12. Sean u y v dos vectores no nulos. Demuestra que tienen la misma norma sii u + v y u v son ortogonales.

13. Hallar el punto de intersección de la recta $x + 2y - z - 6 = 0$, $2x - y - 3z + 13 = 0$ con el plano $3x - 2y + 3z + 16 = 0$

14. Hallar el ángulo formado por la recta $x + 2y - z + 3 = 0$, $2x - y + 3z + 5 = 0$ y el plano $3x - 4y + 2z - 5 = 0$

15. Escribe en forma paramétrica, las ecuaciones de la recta de intersección de los planos $3x + 3y - 4z + 7 = 0$ y $x + 6y + 2z - 6 = 0$

16. Hallar los puntos de intersección con los planos coordenados de las rectas $x - 2y + z = 0$, $3x + y + 2z = 7$

17. Escriba la ecuación general de dos rectas del haz determinado por el origen y forme una combinación lineal de dichas ecuaciones. ¿Es la ecuación de una recta? ¿Es una recta por el origen?

18. Dé tres rectas del haz de paralelas con dirección al vector (1, 2).

19. Hallar el valor del parámetro k de forma que

    a) $3kx + 5y + k - 2 = 0$ pase por el punto (-1,4)

    b) $4x - ky - 7 = 0$ tenga de pendiente 3.

20. Hallar las ecuaciones de la recta de pendientes $-\frac{3}{4}$que formen con los ejes coordenados un triángulo de área 24 unidades de superficie.

3. Semiplanos, dividir un segmento en partes iguales.

1. Sean los puntos S(2,3) y T(5,8). Encuentra los puntos P a un tercio y dos tercios del segmento ST.

2. Muestra que las coordenadas (x', y') y (x'', y'') de los puntos que trisecan al segmentos cuyos extremos son $S(x_1, y_1)$ y $T(x_2, y_2)$ están dadas por:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{2x_1 + x_2}{3} \\ y' = \dfrac{2y_1 + y_2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = \dfrac{x_1 + 2_2}{3} \\ y'' = \dfrac{y_1 + 2y_2}{3} \end{cases} \tag{6}$$

3. Calcule las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento de recta cuyos extremos son $S(3,-4)$ y $T(6,2)$.

4. Sea un triangulo con vértices $R(6,1)$, $S(-2,3)$ y $T(2,-7)$. Muestre que su baricentro se encuentra a dos tercios de la distancia que separa cada vértice de su lado opuesto.

5. Un repartidor va en bicicleta desde una distancia $d = 0m$ a un tiempo $t = 0s$. Tristemente lleva la mochila abierta y se le van cayendo 3 hamburguesas por todo el camino que recorre, hasta llegar al punto $(210s, 150m)$.

   a) Si la distancia entre las hamburguesas que se le cayeron es igual, determina las coordenadas en que están las hamburguesas.

   b) También se le fueron regando papitas a la francesa. Si eran 30 papitas y se le fueron cayendo de manera que la distancia entre ellas también es igual, calcula las coordenadas de las 30 papitas.

   c) ¿Podrías hacer una fórmula para segmentar esa recta en partes iguales?

6. Imagina que estás programando una manera de limitar una región del plano, pero sólo te dicen que está delimitado por la recta $3x - \frac{1}{2}y + 1 = 0$ y que también la recta $3x - \frac{1}{2}y = 0$.

   a) ¿Cómo denominarías la región que contiene a ambas rectas?

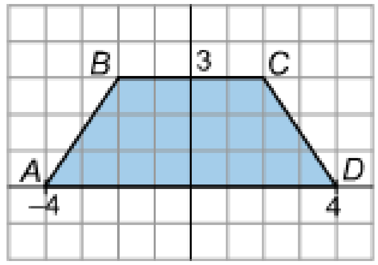
   b) Si la región es la franja entre ambas rectas, ¿Cómo denotarías esa franja?

   c) Esa franja, ¿Representa un subespacio vectorial del plano euclidiano? Demuestra o da un contraejemplo.

7. Un matemático quiere hallar el máximo de la función $z = 3x + 2y$, sujeta a las condiciones:
$$\begin{cases} 50 \leq x + y \leq 150 \\ y \leq x \\ 0 \leq x \leq 100 \\ y \geq 0 \end{cases}$$
   Ayúdalo y determina el máximo.

8. Dibuja el conjunto de puntos que son solución al siguiente sistema de inecuaciones:
$$\begin{cases} x + 3y - 7 > 0 \\ 3x - 2y + 1 > 0 \\ 4x + y - 17 < 0 \end{cases} \tag{7}$$

9. Un terreno comprende la región azul de la imagen de abajo.



a) Describe, mediante un sistema de inecuaciones, los semiplanos necesarios para generar dicha región.

b) Se desea colocar 2 columnas que divida cada segmento (AB y CD) en tres partes iguales. Halle las posiciones para colocar las columnas.

10. Hallar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento PQ en cuatro parte iguales. Los extremos son P(8,-3) y Q(-2,6)

11. Utiliza el teorema de Thales para dividir el segmento AB en cinco partes iguales. Justifica cada uno de tus pasos.

12. Encuentra el punto P que divide al segmento con puntos A(2,3) y B(6,7) en razón 5.

13. Representa el semiplano de $x \leq y - 1$.

14. Hallar la ecuación de la recta de pendientes $-\frac{3}{4}$ que formen con los ejes las coordenadas de un triángulo de área 24 unidades de superficie.

15. Determina la distancia al origen del plano por el origen cuyo vector normal es (1,-1,1).

16. Consideremos el triángulo cuyos vértices son $A(-\frac{22}{3}, 3)$, $B(\frac{2}{3}, -3)$ y $C(\frac{58}{15}, 3)$. Encuentra el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados.

17. ¿En qué unto debes colocar un soporte para que, al colocar un peso de 6 kilogramos en el lado izquierdo y otro de 15 kilogramos en el lado derecho de un tabla de 5 metros e largo, ésta permanezca en equilibrada?

18. ¿En qué razón divide el punto de coordenadas (-1,-7) al segmento $\vec{PQ}$ que une a los puntos P-3,-15) y Q(2,5)?

19. Encuentra las coordenadas del punto R que satisfaga $\frac{PR}{PQ} = \frac{5}{2}$

20. Los vértices de u triángulo rectángulo son A(2-,1), B(0,3) y C(6,7).

a) Encuentra el punto medio E, de AB y el punto medio D, de AC.

b) Encuentra la longitud de ED y determina la relación entre esta longitud y la longitud de BC.

4. Rectas y distancias en el espacio.

1. Calcula la distancia de la recta al punto que se menciona:

   a) $3x + 4y = 0$ al punto $P_1 = (2, 1)$

   b) $3x - 4y - 25 = 0$ al origen

   c) $-2x + \frac{3}{2}y + 1 = 0$ al punto $P_3 = (\frac{3}{2}, \frac{4}{3})$

2. La trayectoria que lleva el Halcón Milenario está dada por el vector $(1, 2)$, pero trasladada al punto $(4, 0)$, pero ¡Hay un planeta en la vicinidad! En las coordenadas $(4, 4)$.

   a) Deduce la ecuación general de la trayectoria del Halcón Milenario.

   b) Determina si la nave colisionará con el planeta. En caso de que no choque con él, da la distancia entre el planeta y el transbordador espacial.

3. Hallar la distancia entre las rectas indicadas:

   a) $3x - 4y + 4 = 0$ a $9x - 12y - 4 = 0$

   b) Entre las rectas

$$\mathcal{L}_1 = \begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 1 + k \end{cases} \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{ \frac{x+3}{-3} = \frac{y+5}{-1} \right.$$

   c) $-\frac{1}{2}x - 3y + \frac{1}{5} = 0$ y $\frac{1}{3}x + 2y - \frac{2}{15} = 0$

   d) $3x - 2y + 1 = 0$ y $-\frac{1}{3}x - y - 3 = 0$

4. ¿Cuáles son los casos de intersección entre dos rectas?

5. Dos asteroides navegan por el espacio, cuyas trayectorias están regidas por las ecuaciones $A_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y - 3 = 0\}$ y $A_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x + 4y + 7 = 0\}$. ¿Colisionarán en algún punto? En caso negativo, determina la distancia entre ambas trayectorias.

6. Calcule la distancia entre los puntos $S(3, -1, 2)$ y la recta $\mathscr{L}$ cuya ecuación

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \tag{8}$$

7. Sea $\mathscr{L}_1$ una recta en el espacio cuyo vector de dirección es $\vec{v_1}$ y que contenga al punto T_1, además, sea $\mathscr{L}_1$ una recta oblicua (no paralela y que no corte a $\mathscr{L}_1$) en el espacio cuyo vector de dirección es $\vec{v_2}$ y pase por T_2. Emplee el hecho de que $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$ es un vector perpendicular tanto para $\mathscr{L}_1$ como $\mathscr{L}_2$ para demostrar que la distancia (perpendicular) que separa a $\mathscr{L}_1$ de $\mathscr{L}_2$ es:

$$d(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) = \frac{|(\vec{t_2} - \vec{t_1}) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)|}{||\vec{v}_1 \times \vec{v}_2||} \tag{9}$$

8. Con el resultado del ejercicio anterior, determine la distancia entre las rectas:

$$\mathscr{L} := (1,0,1) + r(2,3,1) \quad r \in \mathbb{R} \qquad\qquad \frac{x+1}{2} = 1 - y = z$$

9. Dos rayos láser tienen una trayectoria modelada por las siguientes líneas rectas:

$$\begin{cases} \mathscr{L}_1 := \hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k} + r_1(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}) & r_1 \in \mathbb{R} \\ \mathscr{L}_2 = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k} + r_2(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}) & r_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{10}$$

   a) ¿En algún momento (posición) se interactuarán ambos rayos? $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$

   b) Obtenga la distancia mínima (perpendicular) de dichos rayos.

10. Encuentra la ecuación dela recta que es perpendicular al segmento que pasa por el origen y que forma un ángulo de 30^o con el eje x, y cuya distancia a origen es 5.

11. Considera las rectas cuyas ecuaciones son $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ y $9x - 12y - 5 = 0$, y los puntos $A(2, \frac{7}{2})$ y $B(8,8)$.

    Calcula las distancias de A y B a cada una de as rectas. ¿Qué puedes decir la recta que pasa por los puntos A y B?

12. los puntos $A(x,4)$ y $B(5,y)$ se encuentran a una distancia de $\frac{20}{\sqrt{130}}$ de la recta que pasa por los puntos $P(-3,2)$ y $Q(8,5)$. Encuentra la abscisa de A y la ordenada de B.

13. Se tiene

$$2x - 5 = 0 \text{ y } P(0, \tfrac{1}{2})$$

    Encuentra la distancia del punto P a la recta dada y establece si P está del mismo lado de la recta que el origen.

14. Encuentra la bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas $9x + 12y + 21 = 0$ y $3x + 4y + 5 = 0$

15. Los lados de un triángulo se encuentran sobre las rectas $5x - 12y - 8 = 0$, $9x + 12y + 14 = 0$ y $3x - 4y + 5 = 0$. Encuentra las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos del triángulo.

16. Se tiene las siguientes rectas.

$$\mathcal{L}_1 := x - 1 = \frac{y+2}{3} = z \qquad\qquad \mathcal{L}_2 := x + 2 = \frac{y-1}{3} = z + 4$$

    a) Explica si son paralelas.

    b) Calcula la distancia entre ellas.

17. Dados P(1,2), Q(3,6) y R(2,4)

    a) Determina si $\vec{PR}$ y $\vec{QR}$ tienen la misma dirección o dirección contraria.

    b) Encuentra la longitud de los segmentos dirigidas $\vec{PR}$ y $\vec{QR}$

5. Ecuaciones de planos en el espacio.

1. Recordemos los vectores $(1, 0)$ y el $(0, 1)$.

    a) ¿Qué es lo que se genera con todas las combinaciones lineales de $(1, 0)$?

    b) ¿Qué es lo que se genera con todas las combinaciones lineales de $(0, 1)$?

    c) ¿Podemos llegar a cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ mediante combinaciones lineales de estos dos vectores canónicos?

    Si lo último es cierto, entonces ¡Se genera todo el plano cartesiano!

2. Pasemos al espacio cartesiano y tomemos los vectores $(1, 1, 0)$ y el $(1, 0, 1)$.

    a) ¿Podemos llegar al vector $(1, 1, 1)$ mediante alguna combinación lineal de $(1, 1, 0)$ y el $(1, 0, 1)$?

    b) ¿Es cierto que alguna combinación lineal de este par de vectores ($(1, 1, 0)$ y el $(1, 0, 1)$) nos hace llegar a $(7/2, 1/2, 3)$?

    c) ¿Cómo es que podemos llegar a ciertos vectores y a otros no con los $(1, 1, 0)$ y el $(1, 0, 1)$? Observa a los vectores $(1, 1, 1)$ y a $(7/2, 1/2, 3)$. ¿Cómo son respecto a los primeros dos vectores?

3. Se lanzan dos sondas al espacio desde las coordenadas $(-2, 1, -1)$, cuya trayectoria está regida por dos rectas:

$$\mathcal{L}_1 := \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \qquad\qquad \mathcal{L}_2 := \frac{x-1}{-2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{3}$$

    a) Determinar la ecuación del plano que contiene a $\mathcal{L}_1$ y a $\mathcal{L}_2$.

b) Determinar la ecuación que contiene a $\mathcal{L}_1$ y es paralela a $\mathcal{L}_2$.

4. Se desea hacer una película delgada que sirva de detector para una región triangular equilátera, pero debe cumplir ciertas condiciones: pasa por el punto $(1, 2, 1)$, y corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Sabiendo que ABC es equilátero,

   a) Dar con la ecuación canónica del plano.

   b) Llegar a la ecuación general del plano.

5. Obtenga la ecuación general del plano de:

   a) El plano $\mathcal{P} := (1, 0, 1) + u(2, 1, 1) + v(1, 0, 2) \qquad u, v \in \mathbb{R}$

   b) Pasa por los puntos (0,-1,2), (1,1,-1) y (2,1,0)

6. Sean dos planos $\mathcal{P}_1$ y$\mathcal{P}_2$ con vectores normales $\vec{v_1}, \vec{n_2}$. Además considere una recta $\mathscr{L}$ con vector de dirección $\vec{a}$. Entonces se tienen las siguientes definiciones:

$$1) \qquad \mathcal{P}_1 \| \mathcal{P}_2 \iff \vec{n_1} \| \vec{n_2}$$

$$2) \qquad \mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \iff \vec{n_1} \perp \vec{n_2}$$

$$3) \qquad \mathscr{L} \| \mathcal{P}_1 \iff \vec{a} \perp \vec{n_1}$$

$$4) \qquad \mathscr{L} \perp \mathcal{P}_1 \iff \vec{a} \| \vec{n_1}$$

   Ahora, considere la recta y los planos que siguen:

$$\begin{cases} \mathscr{L} := r(1, 2, -1) \qquad r \in \mathbb{R} \\ \mathcal{P}_1 := 2x + y + z = 1 \\ \mathcal{P}_2 := (1, 1, 0) + u(2, 1, 1) + v(0, -1, 1) \qquad u, v \in \mathbb{R} \end{cases}$$

   a) Determinar el punto de intersección entre $\mathscr{L}$ y $\mathcal{P}_1$.

   b) ¿Es $\mathcal{P}_2$ ortogonal o paralelo a $\mathcal{P}_1$?

   c) ¿Es $\mathscr{L}$ ortogonal o paralelo a $\mathcal{P}_1$?

7. Considere los planos con ecuaciones generales dadas por:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 3 \\ 4x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

   a) Obtenga la intersección común (si la hay) de los tres planos.

   b) La intersección de un plano $\mathcal{P}$ en el espacio con uno de los planos cartecianos recibe el nombre de *traza* de $\mathcal{P}$ en ese plano carteciano. Encuentre las trazas en los planos XY, XZ,YZ.

c) Dibuje las trazas encontradas en el 1er cuadrante del espacio carteciano de $\mathbb{R}^3$.

8. Encuentra la ecuación del plano $\mathcal{P}$ que pasa por $(2,-1,3),(-1,-2,1)$ y perpendicular al plano $x-3y+4z-2=0$.

9. Sea el plano $\mathcal{P}$ con ecuación general $x+y-z-1=0$. Obtenga el valor k para que una recta $\mathscr{L}$ (cuya ecuación se muestra abajo) este contenida en $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+z=k \end{cases} \tag{11}$$

10. Encuentra la ecuación del plano que pasa por el origen y es perpendicular al vector (1,-2,5)

11. Hallar la ecuación del plano que pasa por $P_o(-1,3,-2)$ y tiene como vector normal a (2,-4,1)

12. Hallar la ecuación del plano que pasa por $P_o(-1,3,-2)$ y es paralelo a los vectores (0,4,-3) y (1,0,1).

13. Determina el conjunto de ecuaciones simétricas dada por la intersección de los siguientes planos:

$$\begin{cases} 4x-3y+z=0 \\ 2x+5y-3z+4=0 \end{cases}$$

14. Calcula la ecuación paramétrica y general que pasa por $A(1,-1,4)$, $B(2,5,0)$ y $C(3,-2,6)$.

15. Sea $\mathcal{P} := x+3y-4z-6=0$ la ecuación general del plano.

    a) Encuentra la ecuación paramétrica.
    b) Encuentra un punto que pase por el plano.
    c) Encuentra la ecuación vectorial.

16. Escribe la mínima cantidad de datos que pueden determinar un plano.

17. Para que sirve el que pueda escribir como combinación linea al vector generador del plano.

18. Dados tres puntos que se encuentran en el plano, escribe los pasos que necesitas realizar para encontrar su ecuación.

19. Escribe un ejemplo de la ecuación del plano que no pasa por el origen. Justifica tu respuesta.

20. Escribe un ejemplo de la ecuación del plano que sea paralela al eje Y

6. Planos y distancias en el espacio.

1. Calcule la distancia que separa:

   a) El punto $S(3,2,4)$ y el plano $\mathcal{P} := 2x + y + z = 1$.

   b) El punto $S(3,-1,2)$ y el plano $\mathcal{P} := x + 2y - 2z = 6$

2. Considere el plano en su forma general $\mathcal{P} := Ax + By + Cz + D = 0$.

   a) Demuestra que la distancia d (llamada *distancia dirigida*) que separa al origen y el plano $\mathcal{P}$ es:

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{12}$$

   b) Considere una recta cuya ecuación paramétrica es $\mathscr{L} := Ax + By + Cz = 0$. Notase que pasa por el origen. Halle el punto de intersección entre $\mathcal{P}$ y $\mathscr{L}$ en términos de A, B, C, D.

   c) ¡Antes una pequeña definición!: Sea un vector no nulo $\vec{v} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Los *ángulos directores* $\alpha, \beta, \gamma \in [0,\pi]$ de $\vec{v}$ son los ángulos comprendidos entre $\vec{v}$ ángulos entre los vectores base $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$. Se pueden definir a traves de los *cosenos directores*:

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \hat{i}}{||\vec{v}||\ ||\hat{i}||} = \frac{a}{||\vec{v}||}$$

$$cos(\beta) = \frac{\vec{v} \cdot \hat{j}}{||\vec{v}||\ ||\hat{j}||} = \frac{b}{||\vec{v}||}$$

$$cos(\gamma) = \frac{\vec{v} \cdot \hat{k}}{||\vec{v}||\ ||\hat{k}||} = \frac{c}{||\vec{v}||}$$

   Suponga que el plano no pasa por el origen. ¿Qué implicaría?. Muestre que los cosenos directores del vector del punto de intersección entre el plano y la recta son:

$$cos(\alpha) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \left(\frac{-D}{|D|} \right) \tag{13}$$

$$cos(\beta) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \left(\frac{-D}{|D|} \right) \tag{14}$$

$$cos(\gamma) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \left(\frac{-D}{|D|} \right) \tag{15}$$

   d) Finalmente, con los resultados anteriores deduce la *ecuación en su forma normal* del plano:

$$xcos(\alpha) + ycos(\beta) + zcos(\gamma) - d = 0 \tag{16}$$

3. Un campo magnético tiene una partícula o_1 suspendida en él, y se hace pasar otra partícula o_2 por el campo. La primera partícula o_1 está localizado en el punto $P = (1, 3, -1)$, y o_2 seguirá la trayectoria impuesta por:

$$\mathcal{L}_1 := \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

¿Choca con el o_2 colisonará con o_1?

4. Un capacitor de placas paralelas tiene colocado un neutrón en medio, en la posición $P = (3, 2, -2)$. Las placas están definidas por:

$$\mathcal{P}_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z + 1 = 0\}$$

$$\mathcal{P}_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - z - 3 = 0\}$$

Hallar la distancia de P a las placas paralelas.

5. La trayectoria de un pato sigue la ecuación $L := x - 2 = y = z + 1$ y pasa por un techo de un edificio definido por la ecuación $\mathcal{P} : x + y - 2z + 3 = 0$.

   a) Obtén un vector normal al plano.

   b) Verifica si el vector normal al plano y el vector directos de la recta son paralelos.

   c) Basándote en tu respuesta anterior, ¿Cómo podrías saber que una recta y un plano son paralelos?

   d) Si la recta no está en el plano y son paralelos, da la distancia entre la recta y el plano.

6. Determina la distancia entre el plano $\mathcal{P} : 4x + 2y + z - 6 = 0$ y la recta:

$$\mathcal{L} := \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

7. ¿Cuáles son todos los casos de intersecćíon entre dos planos? ¿Y entre tres?

8. Determina las intersecciones entre los siguientes pares de planos:

   a) $\mathcal{P}_1 : -x + y + z = -\frac{3}{2}$ y $\mathcal{P}_2 : 2x - 2y - 2z = -3$

   b) $\mathcal{P}_3 : -x - 2y - z = 2$ y $\mathcal{P}_4 : 2x + 4y + 2z = 1$

9. Deduce las intersecciones entre las siguientes tríadas de planos:

a)

$$\begin{aligned} -x-2y-3z &= 0 \\ -x+2y+z &= 2 \\ -3x-2y+5z &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= 0 \\ -x+2y+z &= 2 \\ -3x-2y+5z &= 2 \end{aligned}$$

10. La nave espacial Nostromo siempre viaja sobre un plano definido como $\mathcal{P}_{Nos} := 2x+4y-4z-6=0$, por otro lado la nave Prometeo viaja siempre sobre un plano definido como $\mathcal{P}_P := x+2y-2z+9=0$.

    a) ¿Cual es la distancia mínima de separación de las dos naves?

    b) Esboce los subespacios generados por los planos mencionados.

    c) Si la nave A viajara sobre sobre el plano $\mathcal{P}_{Nos} := 2x+4y-4z+k=0$. ¿Qué valor de k debe ser escogida para que ambas naves viajen sobre el mismo plano?

11. Calcula la distancia entre los siguientes planos $\pi_1 := 2x-y-2z+5=0$ y $\pi_2 := 4x-2y-4z+15=0$

12. ¿Qué pasa con la distancia de un punto al plano, si el punto pertenece al plano?

13. Hallar la distancia del punto Q(5,5,3) al plano $\pi := (x,y,z) = (0,0,-4) + (2,2,-1)\lambda + (-3,2,0)\mu$

14. Explica como es la distancia de una recta al plano si:

    a) La recta esta contenida en el plano.

    b) La recta es secante al plano.

    c) La recta es paralela al plano.

15. Determina el punto del plano $2x-y+z=0$ más próximo al punto (1,1,1)

16. Si la distancia entre el plano $Ax-2y+z=0$ y, el plano que cotiene las líneas $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ y $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$ es $\sqrt{2}$ entonces la distancia es

17. Calcula la ecuación del plano cuyo vector normal es (1,-2.2) y pasa por el punto (3,-1,4)

18. Encuentra la ecuación del plano que pasa por el punto (4,-2,3) y es paralelo al plano $3x-7y=12$

19. ¿Cómo es a distancia entre dos planos perpendiculares?

20. Dados los planos $4x - y + 3z = 1$ y $2x + 2y - 3z = 5$, determina si son paralelos o perpendiculares.