Ecuaciones Canónicas de las cónicas

Arilin's Math World

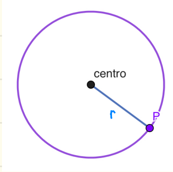
Ecuación de la Circunferencia

Pensemos que estamos en el plano y tenemos una circunferencia de radio r, con centro en el punto C=(a,b).

Es natural que el impulso nos lleve a querer encontrar una ecuación para esta circunferencia.

Entonces vamos a dejarnos llevar...

Elementos



- Un punto, C, que servirá como centro.
- Una distancia, r, a la que llamaremos radio.

Definición.
Una circunferencia es el conjunto de puntos que están a distancia fija, r, del centro.

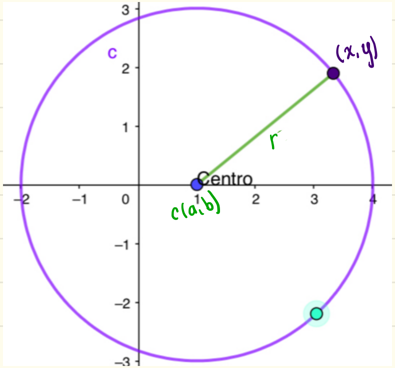
$$d_{(P_1,P_2)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Un punto $P=(x,y)$ en la circunferencia de radio r y centro en $C=(a,b)$ debe cumplir con:

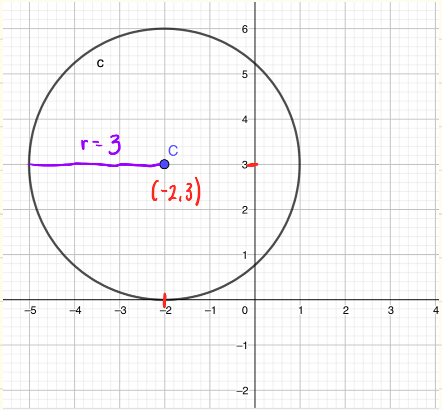
$d_{P,C} = r$, es decir

$d_{(x,y),(a,b)} = r$ lo cual pasa si y sólo si

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \leftrightarrow \boxed{(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2}$$



Ejemplo.
Calcular la ecuación de la siguiente circunferencia



$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Solución:

Ya que sé que el radio es $r=3$ y el centro $(a,b)=(-2,3)$ sustituyo los valores de r, a y b en la ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ y obtengo:

$$(x-(-2))^2+(y-3)^2=3^2$$

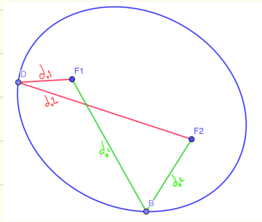
$$(x+2)^2+(y-3)^2=9$$

Ecuación de la Elipse

Elementos

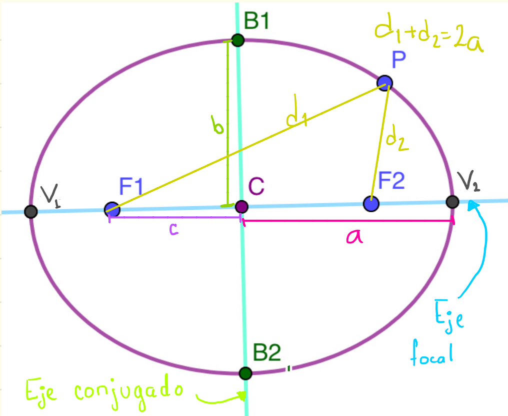
- Dos puntos fijos que serán llamados focos.
- Una longitud, 2a.

Lugar geométrico de la elipse :
Una elipse es el conjunto de puntos tales que la suma de las distancias del punto a cada lo foco es fija, 2a.



Para que un punto $p=(x,y)$ pertenezca a la elipse con focos f_1 y f_2 debe cumplir la ecuación $d_{p,f_1} + d_{p,f_2} = 2a$, donde "a" es un número fijo.

Antes de calcular la ecuación de la elipse veamos otros de sus elementos.



Para facilitar las cuentas vamos a pensar que la elipce tiene sus focos en el eje x y su centro en el origen. De esta manera la ecuación $d_{p,f_1} + d_{p,f_2} = 2a$ quedaría como:

$$d_{(x,y),(-c,0)} + d_{(x,y),(c,0)} = 2a \quad \rightarrow$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$ elevar al cuadrado

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + [(x-c)^2+y^2]$$ desarrollar los 2s

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}$$ eliminar términos semejantes

$$\cancel{4}xc = \cancel{4}a^2 - \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$ dividir ÷4

$$xc - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$ elevar al cuadrado

$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[(x-c)^2+y^2]$$

ir a la sig. página

$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[(x-c)^2+y^2]$$ desarrollar el □

$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[x^2 - 2xc + c^2 + y^2]$$ distribuir a^2

$$x^2c^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2$$ eliminar términos semejantes

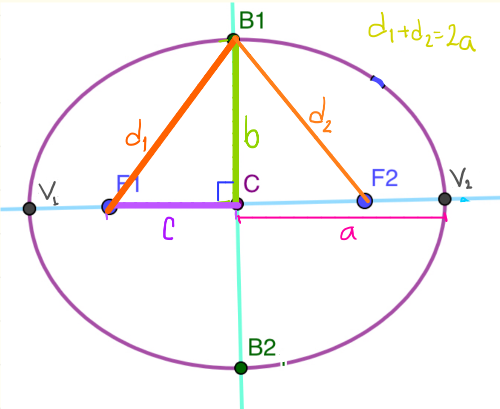
$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$ dividir entre $a^2(c^2-a^2)$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$ $$-\frac{y^2}{c^2-a^2} = \frac{(-1)}{(-1)}\left(\frac{-y^2}{c^2-a^2}\right) = \frac{y^2}{-c^2+a^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

Ahora la cuestión es: ¿Quién es a^2-c^2?



Notemos que:

- El triángulo F_1, C, B_1 es un triángulo rectángulo.
- El triangulo C, F_2, B_1 es congruente al F_1, C, B_1.

Por lo tanto $d_1 = d_2$.

De la regla $d_1 + d_2 = 2a$ junto con $d_1 = d_2$ obtenemos $2d_1 = 2a$. Entonces $d_1 = a$.

Ahora usando nuestro teorema favorito en geometría (Pitágoras) con el triángulo F_1, C, B_1 obtenemos $a^2 = b^2 + c^2$ y por tanto $b^2 = a^2 - c^2$.

Luego, la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$ quedaría como

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

donde a y b son las distancias entre el centro y los vértices en el eje x y eje y respectivamente.

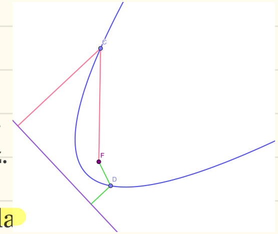
Ecuación de la Parábola

Para que un punto $p=(x,y)$ esté en la parábola con foco en f y directriz L debe cumplir la ecuación $d_{p,f} = d_{p,L}$.

Parábola

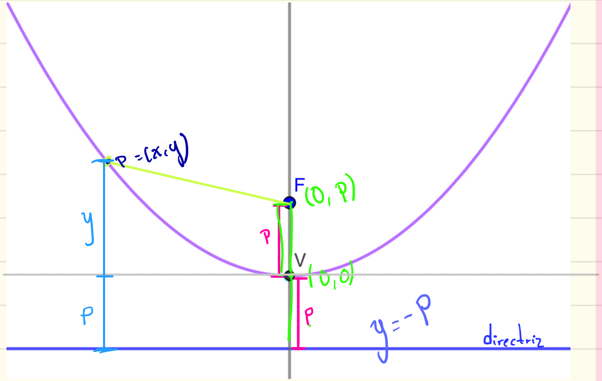
Elementos

- Un punto fijo llamado foco.
- Una recta llamada directriz.



Lugar geométrico de la parábola

Una parábola es el conjunto de puntos que equidistan al punto y a la recta.



$$d_{p,L} = y + p$$

De nuevo, para facilitar las cuentas vamos a pensar que el vértice de la parábola está en el origen y que su recta directriz es paralela al eje x. Tendríamos entonces que la ecuación $d_{p,f} = d_{p,L}$ quedaría como:

$$d_{(x,y),(0,p)} = d_{(x,y),\underbrace{(x,-p)}_{\text{Recta } y=-1}}$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2}$$

$$x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2+y^2-2yp+p^2 = y^2+2yp+p^2$$

$$\boxed{x^2 = 4yp}$$

donde p es la distancia del vértice al foco

Ecuación de la Hipérbola

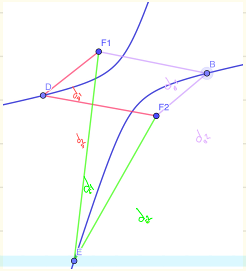
Para que un punto $p=(x,y)$ pertenezca a la hipérbola con focos f_1 y f_2 debe hipérbola cumplir la ecuación $d_{p,f_1} - d_{p,f_2} = 2a$, donde "a" es un número fijo.

Hipérbola

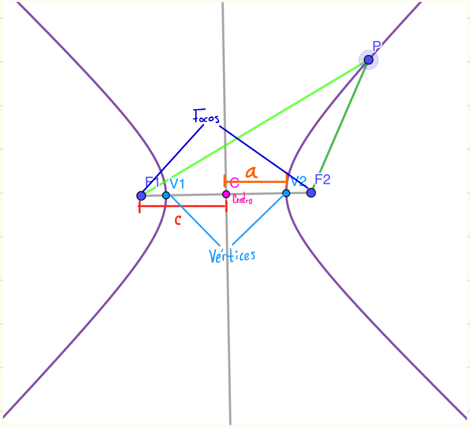
Elementos

- Dos puntos fijos que serán llamados focos.
- Una longitud, 2a.

Lugar geométrico de la hipérbola:
Una hipérbola es el conjunto de puntos tales que la diferencia, resta, entre las distancias del punto a cada lo foco es fija, 2a.



Antes de calcular la ecuación de la hipérbola veámos otros de sus elementos.



Para facilitar las cuentas vamos a pensar que la hipérbola tiene sus focos en el eje x y su centro en el origen. De esta manera la ecuación d_{p,f_1} $d_{p,f_2} = 2a$ quedaría como:

$$d_{(x,y),(-c,0)} - d_{(x,y),(c,0)} = 2a \rightarrow$$

$$\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$ elevar al cuadrado

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + [(x-c)^2+y^2]$$ desarrollar los 2s

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2} = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}$$ eliminar términos semejantes

$$\cancel{4}xc = \cancel{4}a^2 + \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$ dividir ÷4

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$ elevar al cuadrado

$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[(x-c)^2+y^2]$$ ir a la sig. página

$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$ desarrollar el □

$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[x^2 - 2xc + c^2 + y^2]$$ distribuir a^2

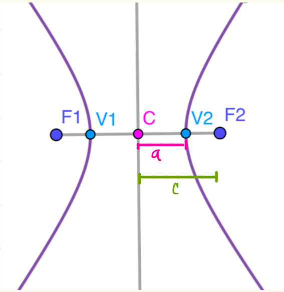
$$x^2c^2 - \cancel{2a^2cx} + a^4 = a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2$$ eliminar términos semejantes

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$ dividir entre $a^2(c^2-a^2)$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

Ahora la cuestión es: ¿Quién es c^2-a^2 ?



Como $a<c$ entonces $a^2<c^2$, luego $c^2-a^2>0$. Por lo tanto $c^2-a^2=b^2$ para algún $b\in\mathbb{R}$

Sustituyendo $b^2=c^2-a^2$ en la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

Obtenemos

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

- Imágenes creadas con Bitmoji
- Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World