

Parametrización de las cónicas.

- * Recordatorio de Trigonometría
- * Parametrización de las cónicas

Trigonometría

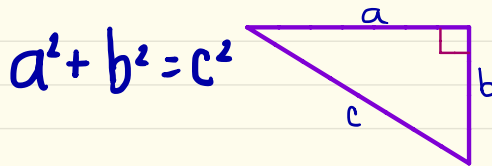
Recordemos un poco de trigonometría.

Vamos a considerar únicamente a los triángulos rectángulo. Es decir, los que tienen un ángulo recto. Para estos llamamos catetos a los lados que forman el ángulo recto y llamamos hipotenusa al otro lado, o sea, el más largo.



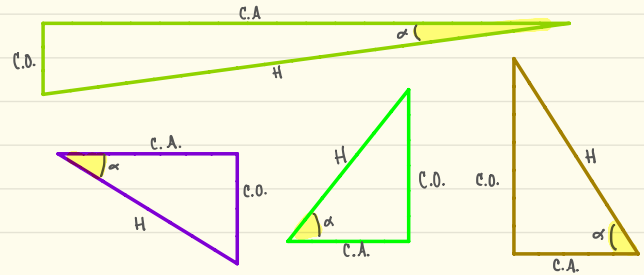
Lo primero que debemos recordar es:

Teorema de Pitágoras



Donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa.

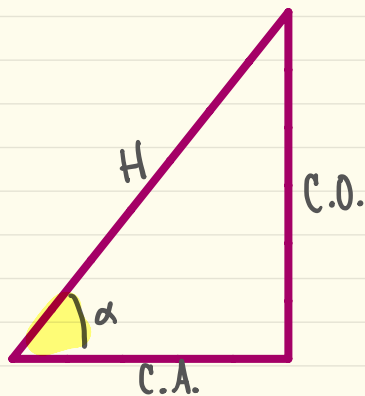
Para continuar vamos a elegir uno de los ángulos.



Ahora recordemos las razones trigonométricas

Nombre	Notación	Fórmula
Coseno	$\cos \alpha$	$\frac{CA}{H}$
Seno	$\sin \alpha$	$\frac{CO}{H}$
Tangente	$\tan \alpha$	$\frac{CO}{CA}$
Secante	$\sec \alpha$	$\frac{H}{CA}$
Cosecante	$\csc \alpha$	$\frac{H}{CO}$
Cotangente	$\cot \alpha$	$\frac{CA}{CO}$

Identidades trigonométricas



Del teorema de

Pitágoras

tenemos

$$H^2 = C.A.^2 + C.O.^2$$

$$\frac{H^2}{C.A.^2} = \frac{C.A.^2}{C.A.^2} + \frac{C.O.^2}{C.A.^2}$$

$$\left(\frac{H}{C.A.}\right)^2 = 1 + \left(\frac{C.O.}{C.A.}\right)^2$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

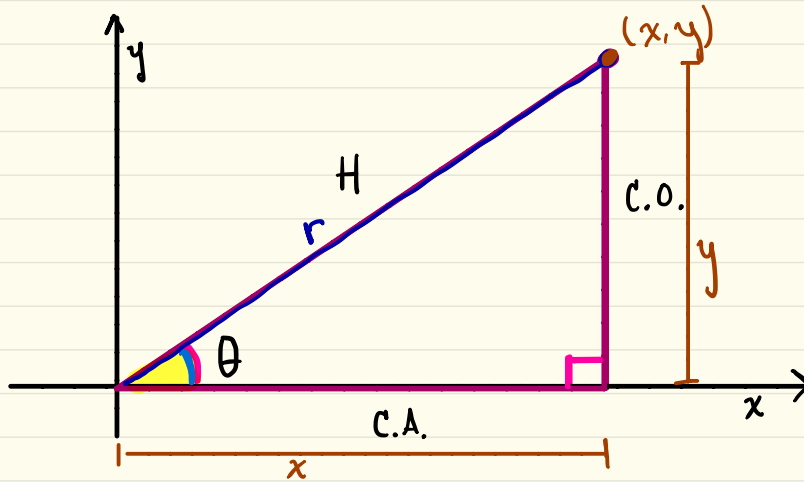
$$\frac{H^2}{H^2} = \frac{C.A.^2}{H^2} + \frac{C.O.^2}{H^2}$$

$$1 = \left(\frac{C.A.}{H}\right)^2 + \left(\frac{C.O.}{H}\right)^2$$

$$1 = (\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2$$

$$1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

Veamos esto en el plano cartesiano.



$$\cos \theta = \frac{C.A.}{H}$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{C.O.}{H}$$

$$C.A. = H \cos \theta$$

$$C.O. = H \text{ Sen } \theta$$

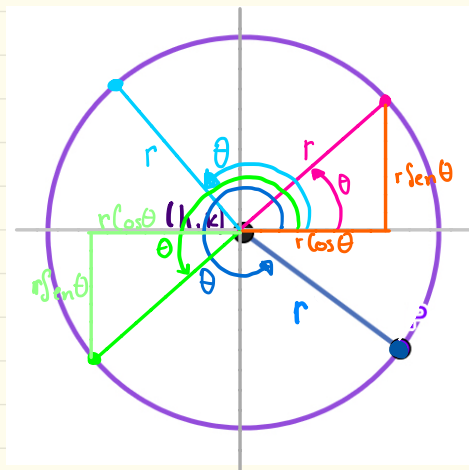
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \text{ Sen } \theta$$

Para el ángulo θ el lado "x" es el cateto adyacente, CA. A su vez, el lado "y" es el cateto opuesto, CO. Además "r" es la hipotenusa, H, del triángulo.

Circunferencia

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2$$



Fijemos un punto (h, k) en el plano para que sea el centro. También fijemos un r que sea el radio de la circunferencia.

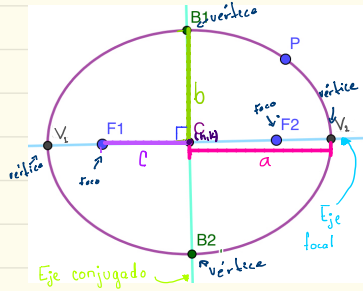
Notemos que cada punto (x, y) en la circunferencia cumple con $x = h + r \cos \theta$ y $y = k + r \sin \theta$.

Además notemos que si graficamos $(h + r \cos \theta, k + r \sin \theta)$ habremos dibujado una circunferencia, siempre y cuando θ tenga una variación de 360° .

Por lo tanto $\gamma(\theta) = (h + r \cos \theta, k + r \sin \theta)$ es una parametrización de la circunferencia.

Elipse

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Aquí ya no podemos hacer lo mismo que en la circunferencia pues la distancia del centro a un punto en la circunferencia ya no es un r fijo sino que puede variar entre a y b .

Vamos a encontrar la parametrización de la elipse a partir de la ecuación canónica y de alguna conveniente identidad trigonométrica.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \underbrace{\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{b}\right)^2}_{\textcircled{a}} = 1 \quad \text{y aquí toca sugerir un cambio de variable.}$$

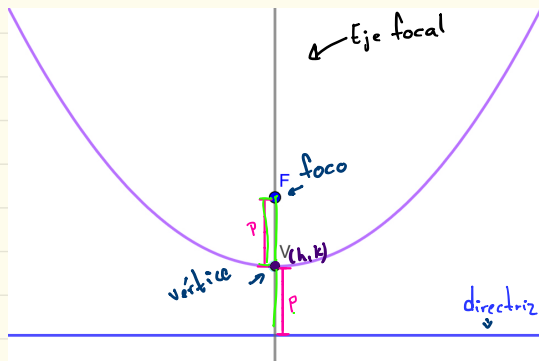
Para eso voy a recurrir a la identidad trigonométrica $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, pues tiene la misma forma que la ecuación $\textcircled{a}$. Y considero $\cos\theta = \frac{x-h}{a}$ y $\sin\theta = \frac{y-k}{b}$ para luego despejar " x " y " y " obteniendo así el "cambio de variables" $x = a\cos\theta + h$, $y = b\sin\theta + k$ que pone a las coordenadas (x, y) en función del ángulo θ .

Entonces $\gamma(\theta) = (a\cos\theta + h, b\sin\theta + k)$ es una parametrización de la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Parábola

$$(x-h)^2 = 4(y-k)p$$

Utilicemos el truco de parametrizar una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
Despejamos y en la ecuación $(x-h)^2 = 4(y-k)p$



$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \rightarrow \frac{(x-h)^2}{4p} = y-k \rightarrow \frac{(x-h)^2}{4p} + k = y$$

Notemos que si tomamos $t = x-h$
entonces la parametrización quedaría

$$x = t+h$$

$$y = \frac{(x-h)^2}{4p} + k = \frac{t^2}{4p} + k$$

es decir

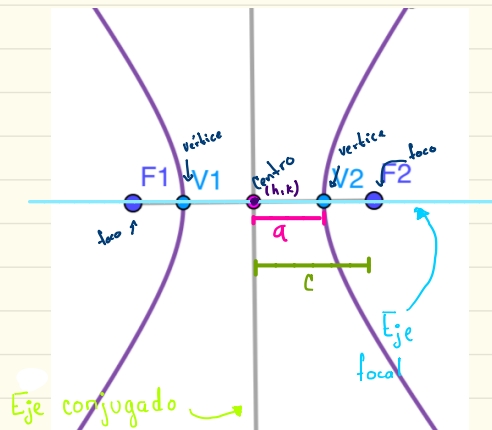
$$\sigma(t) = \left(t+h, \frac{t^2}{4p} + k \right)$$

También podríamos hacer lo siguiente:

Consideremos la función $f(x) = \frac{(x-h)^2}{4p} + k$ y tomemos la parametrización $\sigma(t) = (t, f(t))$. Así obtenemos la parametrización de la parábola de la siguiente manera $\sigma(t) = \left(t, \frac{(t-h)^2}{4p} + k \right)$.

Pero la opción azul
se ve mejor, ¿no?

Hiperbola



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Vamos a parametrizar la hipérbola a partir de su ecuación y alguna identidad trigonométrica conveniente.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \left(\frac{x-h}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1$$

La identidad trigonométrica que tiene esta forma es

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1.$$

Consideremos las igualdades

$\sec \theta = \frac{x-h}{a}$ y $\tan \theta = \frac{y-k}{b}$ y despejemos "x" y "y" para obtener las coordenadas (x, y) de un punto en la hipérbola en función del ángulo θ .

$$x = a \sec \theta + h, \quad y = b \tan \theta + k$$

Entonces $\gamma(\theta) = (a \sec \theta + h, b \tan \theta + k)$ es una parametrización de la hipérbola.

- ✚ Imágenes creadas con Bitmoji
- ✚ Notas hechas por Arilín Haro, de Arilin's Math World
- ✚ Recuerda visitar:
 - * mi canal Arilin's Math y
 - * mi grupo de Facebook Arilin's Math World.

