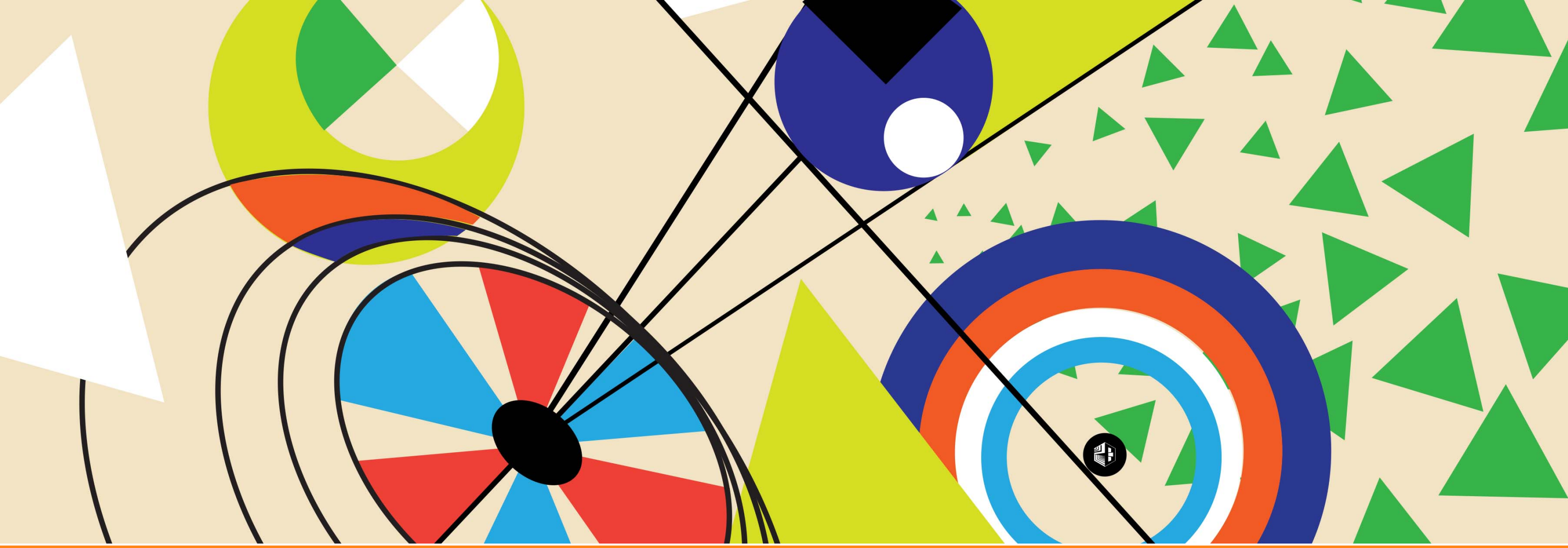


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

Unidad 1. La geometría del triángulo

Introducción general

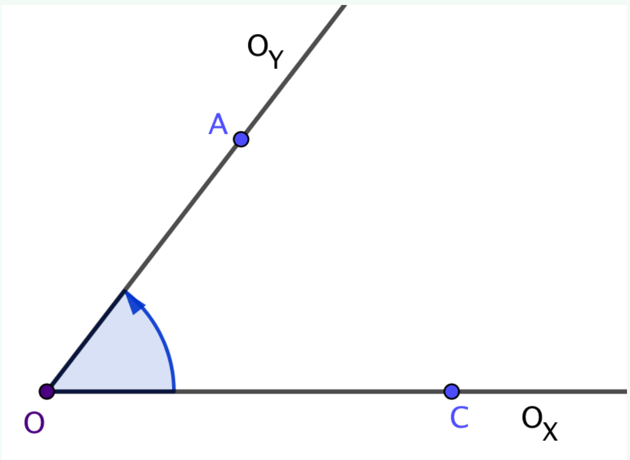
Para iniciar el curso de Geometría Moderna I abordaremos primero algunas construcciones (proposiciones) presentadas en el Libro I de los Elementos de Euclides.
Estas proposiciones nos permitirán ver cómo se fue erigiendo el aparato geométrico y sus demostraciones, todo esto a partir de sus construcciones geométricas, considerando por un lado, los fundamentos de la geometría Euclideana, es decir, las definiciones, los postulados y las Nociones comunes que se encuentran el libro I de los Elementos de Euclides; y por otro lado, considerando únicamente como herramientas de construción a la regla y al compás euclideanos.
Al hablar de construcciones con regla y compás se debe considerar que la regla que se "utiliza" o menciona es una regla no graduada, es decir, que no permite medir longitudes en una determinada unidad métrica como lo hacemos actualmente. Por otra parte, el compás considerado es aquel que permite trazar circunferencias dados dos puntos, uno de ellos el centro de la circunferencia y el otro un punto que consideraremos está sobre la circunferencia, pero que en primera instancia no permite mantener una apertura dada por la distancia entre los dos puntos dados, es decir, podríamos imaginar un compás actual que al separarlo del papel se cierra automáticamente, a este tipo de compás y regla se les llama Compás y regla euclideanos. Es importante mencionar que en las primeras proposiciones que estudiaremos en el curso veremos que aunque estemos pensando en construcciones con regla y compás (euclideanos), pronto seremos capaces de trasladar distancias y hacer todas las construcciones que actualmente hacemos con una regla y compás actuales.
Finalmente, antes de adentrarnos en las construcciones y demostraciones correspondientes, es importante que interiorices la idea de que las demostraciones de los enunciados matemáticos no deben depender de un dibujo determinado, pues las afirmaciones a demostrar buscan mostrar que la validez de dichas afirmaciones se da siempre y cuando se parta de considerar como verdaderas las hipótesis o condiciones iniciales y no de casos particulares observables en el dibujo. De esta forma, las demostraciones buscan argumentar por medio de un pensamiento lógico la generalidad y validez de las afirmaciones presentadas.

En caso de que desees conocer un poco más sobre el pensamiento seguido por Euclides y sus construcciones, te recomendamos consultar el Capítulo 1 del libro: Hïlbert y Gödel del profesor Carlos Torres Alcaráz, editado por las *prensas de ciencias*.

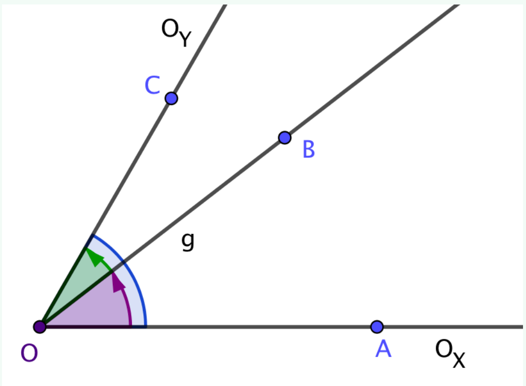
Definiciones elementales

Definición

1. *Un* **punto** *es aquello que no tiene partes.*
2. **Línea** *es la longitud sin espesor ni anchura.*
3. *Los extremos de una línea son puntos.*
4. **Línea recta** *es aquella línea que tiene todos sus puntos en la misma dirección.*
   (a). *Una línea recta es aquella línea que está determinada por cualesquiera dos de sus puntos. A la línea recta también se le dice, simplemente,* **recta**.
5. **Superficie** *es aquello que tiene ancho y largo, no tiene espesor ni volumen.*
6. *Los extremos de una superficie son rectas.*
7. *Una* **superficie plana** *es aquella que contiene una recta en cualquier posición.*
   (a). *Un* **plano** *es una superficie que tiene el mismo nivel en todas partes. Una recta divide a un plano en tres partes: la recta y dos semiplanos.*
   (b). *Un* **semiplano** *es una superficie de las dos que resultan al dividir un plano con una recta. Porción de un plano limitada por una recta.*
   (c). *Dados dos puntos A y B sobre una recta, al pedazo de recta comprendido entre estos dos puntos le llamamos el* **segmento** *AB y lo denotamos $\overline{AB}$.*
8. **Ángulo plano** *es la inclinación entre sí de dos rectas de un plano que se cortan y que no están sobre una misma recta.*
   (a). *Definimos a un ángulo como la parte común de dos semiplanos, el borde del ángulo lo forman los rayos O_X y O_Y con un punto inicial común O. A este punto le llamamos vértice y a los rayos, lados del ángulo.*
   El ángulo se denota como $\angle XOY$ ó $\angle COA$ si C se encuentra sobre O_X y A sobre O_Y. También podríamos referirnos al $\angle COA$ como el ángulo formado entre los segmentos $\overline{OC}$ y $\overline{OA}$.

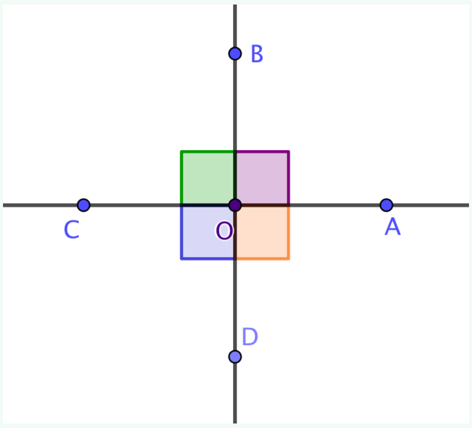


(b). *Si tres rayos OA, OB y OC tienen el vértice O en común, y el rayo OB está dentro del ángulo $\angle AOC$, entonces los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$ se llaman ángulos adyacentes. El ángulo $\angle AOC$ es la suma de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle BOC$.*



$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$

9. *Cuando las líneas que comprenden el ángulo, son rectas, el ángulo es llamado rectilíneo.*
10. *Cuando una recta se levanta sobre otra formando 4 ángulos adyacentes iguales. A cada ángulo se le llama* **ángulo recto** *y a la recta que se levanta sobre la otra se le llama* **perpendicular.**



♣

Postulados de Euclides

P.1 Por cualesquiera dos puntos se puede trazar el segmento de recta que los une.

P.2 Un segmento de recta se puede extender en ambas direcciones indefinidamente.

P.3 Dado un punto y un segmento de recta, se puede trazar un círculo con centro en el punto y cuyo radio sea la longitud del segmento (distancia).

P.4 Todos los ángulos rectos son iguales.

P.5 Dadas dos rectas y una tercera que las corta, si los ángulos internos del mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, entonces las rectas se cortan y lo hacen de ese mismo lado.

Nociones Comunes

NC.1 Cosas que son iguales a una tercera, son iguales entre sí.

NC.2 Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales.

$$A = B \Rightarrow A + C = B + C$$

NC.3 Si a cosas iguales se le quitan cosas iguales, las restantes son iguales.

$$A = B \Rightarrow A - C = B - C$$

NC.4 Cosas que coinciden entre sí, son iguales entre sí.

NC.5 El todo es mayor que la parte.

Algunas proposiciones del Libro I de Euclides

Proposición. I.1.

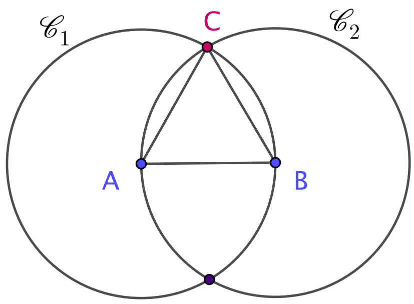
Es posible trazar un triángulo equilátero sobre un segmento dado.

Demostración

Hipotesis: Sea AB un segmento dado.

Tesis: Buscamos construir un triángulo equilátero sobre el segmento AB.

Construcción:



- Por el postulado 1 (P.1.), dados dos puntos A y B podemos trazar el segmento $\overline{AB}$.
- Por el postulado 3 (P.3) trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_1$ con centro en A y radio AB.
- Por el postulado 3 (P.3) trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_2$ con centro en B y radio BA.
- Obtenemos a C, punto de intersección de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$.
- Por el postulado 1 (P.1) trazamos los segmentos AC y BC.
- Hemos construido el triángulo equilátero $\triangle ABC$ sobre el segmento dado AB.

Afirmamos que el triángulo $\triangle ABC$ es equilátero pues AC y AB son radios de $\mathscr{C}_1$, entonces, por la Definición 15, $AB = AC$. De la misma forma $AB = BC$ por ser radios de $\mathscr{C}_2$.
Por la noción común 1 (NC.1) tenemos que $AB = AC$ y $AB = BC$, luego $BC = AB = AC$.
Por tanto, hemos construido el triángulo equilátero $\triangle ABC$. ■

Problema: *¿El triángulo equilátero construido es el único posible que satisface las condiciones?*

Proposición. I.2.

Es posible colocar a partir de un punto dado (como extremo) un segmento igual a otro segmento dado. ♠

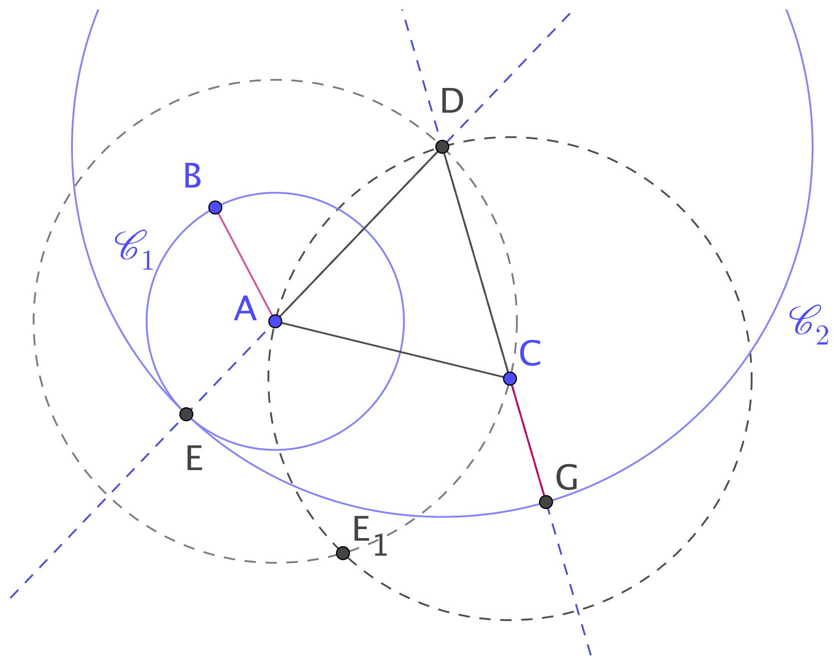
Demostración

Hipótesis: Sea AB un segmento dado. Sea C un punto dado.

Tesis: (P.D.) Se puede construir un segmento CG tal que su longitud sea igual a la del segmento AB, es decir, $CG = AB$.

Construcción:

- Por P.1 trazamos el segmento AC.
- Por la proposición I.1 trazamos el triángulo equilátero con lado AC, sea éste el $\triangle ACD$.
- Por P.3 trazamos una circunferencia $\mathscr{C}_1$ con centro en A y radio AB.
- Por P.2 prolongamos el segmento DA de tal forma que corte a la circunferencia $\mathscr{C}_1$. Llamamos E al punto de intersección.
- Por P.3 trazamos la circunferencia $\mathscr{C}_2$ con centro en D y radio DE.
- Por P.2 prolongamos el segmento DC hasta cortar a la circunferencia $\mathscr{C}_2$.
- Obtenemos así el punto de intersección G, el cual afirmamos cumple que $CG = AB$. Hemos así, construido un segmento por C de longitud igual a AB.



Esta afirmación resulta cierta pues $DE = DG$ por ser radios de $\mathscr{C}_2$.

Además

$$DE = DA + AE$$

$$DG = DC + CG$$

Luego, $DA + AE = DC + CG$.

Por otra parte, $DA = DC$ por ser lados del triángulo equilátero $\triangle ADC$.

De lo anterior y por NC.3 , tenemos que $AE = CG$ pues a cosas iguales, restamos cosas iguales.

Pero, $AE = AB$ por ser radios de $\mathscr{C}_1$, entonces por NC.1

$$CG = AE = AB \Rightarrow CG = AB$$

Por tanto, hemos demostrado que es posible construir a partir de un punto dado un segmento igual a otro dado. ■

Nota *Con esta construcción hemos* **trasladado** *el segmento AB de tal forma que tenga como uno de sus extremos a un punto dado C.*

Ejercicios para ir pensando

1. Dados dos segmentos, uno mayor que el otro, (demostrar que es posible) construir sobre el mayor un segmento igual al menor. (Proposición I.3)
2. Construir un triángulo que tenga un segmento dado de longitud a como uno de sus lados.
   - ¿El triángulo que has construido es el único triángulo posible?
   - ¿Cuántos triángulos más puedes construir?
   - ¿Cómo son, entre ellos, los tamaños (las longitudes) de los otros dos lados del triángulo?
3. Construir un triángulo que tenga dos segmentos dados AB y CD como dos de sus lados.
4. Dados tres segmentos de longitudes a, b y c, construye un triángulo que los tenga como lados.
   - ¿Siempre se puede construir el triángulo?
   - Si tu respuesta a la pregunta anterior es negativa, ¿cuál es la relación que debe haber entre la magnitud de los lados para que el triángulo sea construible?