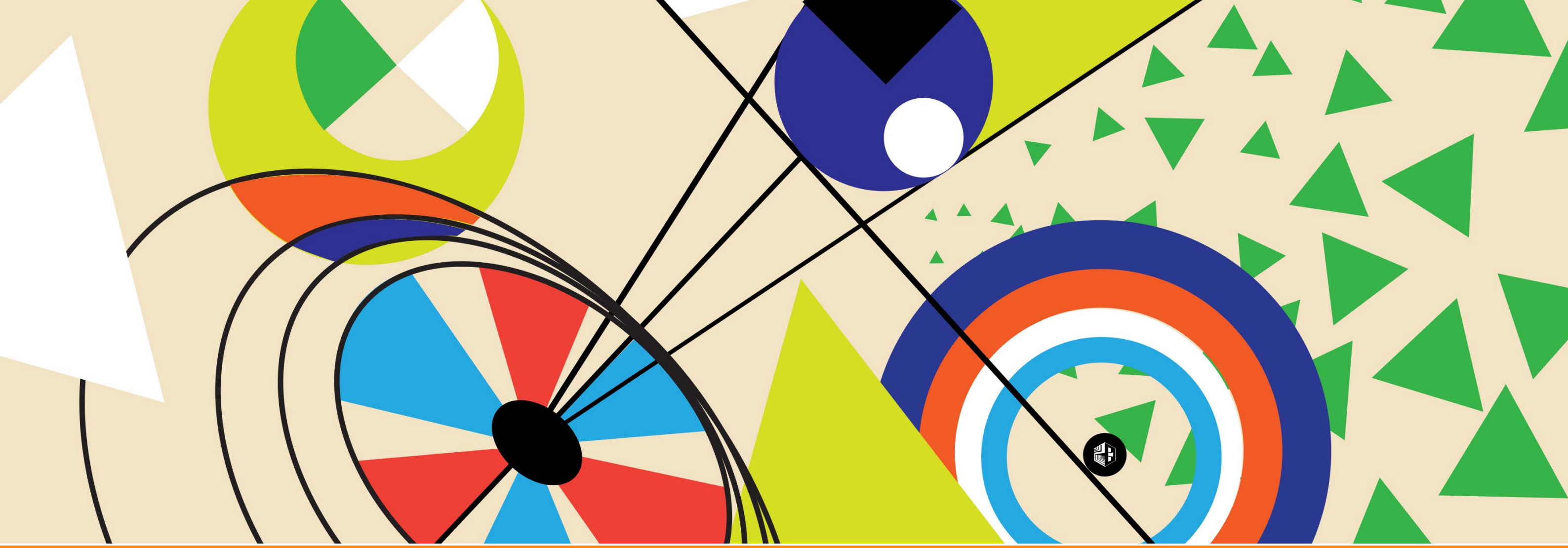


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

Unidad 1. La geometría del triángulo

Algunas propiedades del triángulo

Paralelismo

Antes de estudiar la semejanza de triángulos estudiaremos algunos resultados de paralelismo y algunas propiedades adicionales de los triángulos.

Recordemos el Quinto postulado de Euclides.
Si una recta que corta a otras dos, forma con éstas ángulos internos del mismo lado, que sumados sean menores que dos ángulos rectos, las rectas se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos.

Este postulado nos dice de forma implícita que dados un segmento (recta) y un punto fuera de él (ella), sólo existe una paralela al segmento que pase por el punto dado. A esta reformulación del quinto postulado se le conoce como Axioma de Playfair.

Axioma. Axioma de Playfair

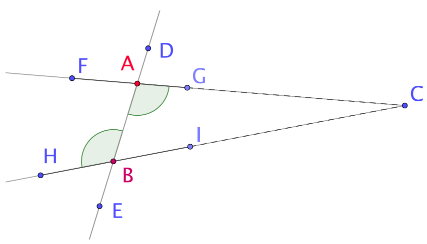
Por un punto exterior a una recta dada, sólo existe una paralela a la recta que pase por el punto dado.

Nota *Se puede demostrar que el axioma de Playfair y el 5o Postulado de Euclides son equivalentes.*

Teorema. Recíproco del 5o Postulado de Euclides

Si una recta corta a dos rectas dadas de tal manera que los ángulos alternos internos son iguales, entonces las dos rectas dadas son paralelas entre sí.

Demostración Por contradicción.



Hipótesis: Sea DE una recta que corta a las rectas FG y HI, tal que los ángulos alternos internos son iguales.
Supongamos que FG y HI no son paralelas, es decir, que se cortan en un punto C, así tenemos el $\triangle ABC$, con A y B puntos de intersección de la secante DE y las rectas FG y HI respectivamente.
Ahora, observemos que, por hipótesis, $\angle ABH = \angle BAC$. ! Lo cual nos lleva a una contradicción por la proposición I.16.
Por tanto las rectas m y n son paralelas. ■

Proposición. I.28

Si una recta al cortar dos rectas forma el ángulo externo igual al ángulo interno no adyacente del mismo lado, o los dos ángulos internos del mismo lado suman dos ángulos rectos, entonces las rectas serán paralelas entre sí.

Demostración La demostración se puede observar en el siguiente video: `https://youtu.be/2U2-m7uOM_w`.

Proposición. I.29

Una recta al cortar dos rectas paralelas forma ángulos alternos internos iguales entre sí, un ángulo externo igual al interno no adyacente del mismo lado, y los dos ángulos internos del mismo lado suman 180º.

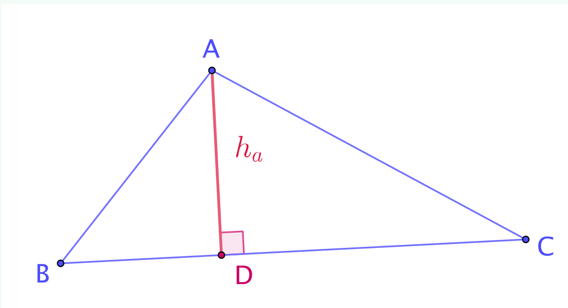
Demostración La demostración se puede observar en el siguiente video: `https://youtu.be/yWHSqTUl810`.

Ejercicios para ir pensando

1. Demuestra el *Teorema:* La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º.
2. Demuestra la *Proposición:* En cualquier triángulo se tiene que el ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes.

Definición 0.1

La altura de un triángulo ABC desde el vértice A es la perpendicular al lado opuesto BC que pasa por A. La denotamos por h_a, al punto de intersección de h_a con BC, digamos D, lo llamamos pie de la perpendicular AD o de la altura $AD = h_a$.



Teorema 0.1

El área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de sus catetos.

Nota *Cuando nos referimos al área de un triángulo lo denotaremos por* $(\triangle ABC)$.

Demostración Sea ABC un triángulo rectángulo.

Trazamos el rectángulo $ADBC$ con las paralelas a CB y AC. Luego, $\triangle ABC \cong \triangle BDA$.

Ahora, el área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura, es decir, $(AC)\cdot(BC)$.

Por tanto $(\triangle ABC) = \dfrac{(AC)\cdot(BC)}{2}$. ■

Teorema 0.2

El área de cualquier triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases por la altura correspondiente a la base considerada.

Demostración

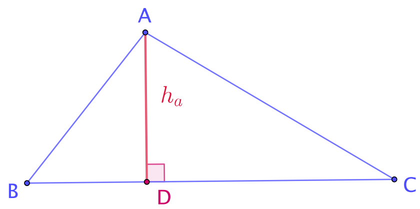
Sea el $\triangle ABC$ y consideremos la alturaAD, es decir la altura desde A sobre BC.

Observemos que tenemos dos casos:

1. Que el pie de la altura, D, se encuentre entre los puntos B y C.
2. Que el pie de la altura, D, se encuentre sobre la prolongación del segmento BC.

Caso 1. Supongamos que D se encuentra sobre el segmento BC.

Tenemos que $(\triangle ABC) = (\triangle ABD) + (\triangle ADC)$, los cuales son triángulos rectángulos.



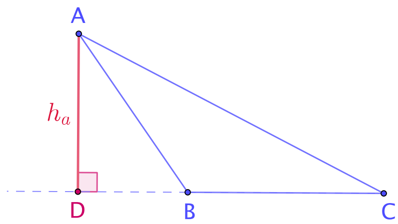
Luego, $(\triangle ABD) = \dfrac{(BD)(AD)}{2}$ y $(\triangle ADC) = \dfrac{(DC)(AD)}{2}$.

Entonces,

$$(\triangle ABC) = (\triangle ABD) + (\triangle ADC)$$
$$(\triangle ABC) = \frac{(BD)(AD)}{2} + \frac{(DC)(AD)}{2}$$
$$(\triangle ABC) = \frac{(BD)(AD) + (DC)(AD)}{2}$$
$$(\triangle ABC) = \frac{(BD + DC)(AD)}{2}$$
$$(\triangle ABC) = \frac{(BC)(AD)}{2}$$

Caso 2. Supongamos que D se encuentra sobre la prolongación del segmento BC. Sin perdida de generalidad, supongamos que está a la izquierda de B.

Luego $(\triangle ADC) = (\triangle ADB) + (\triangle ABC)$, entonces



$$(\triangle ABC) = (\triangle ADC) - (\triangle ADB)$$
$$(\triangle ABC) = (\triangle ADC) - (\triangle ADB)$$
$$(\triangle ABC) = \frac{(DC - DB)(AD)}{2}$$
$$(\triangle ABC) = \frac{(BC)(AD)}{2} \quad ■$$