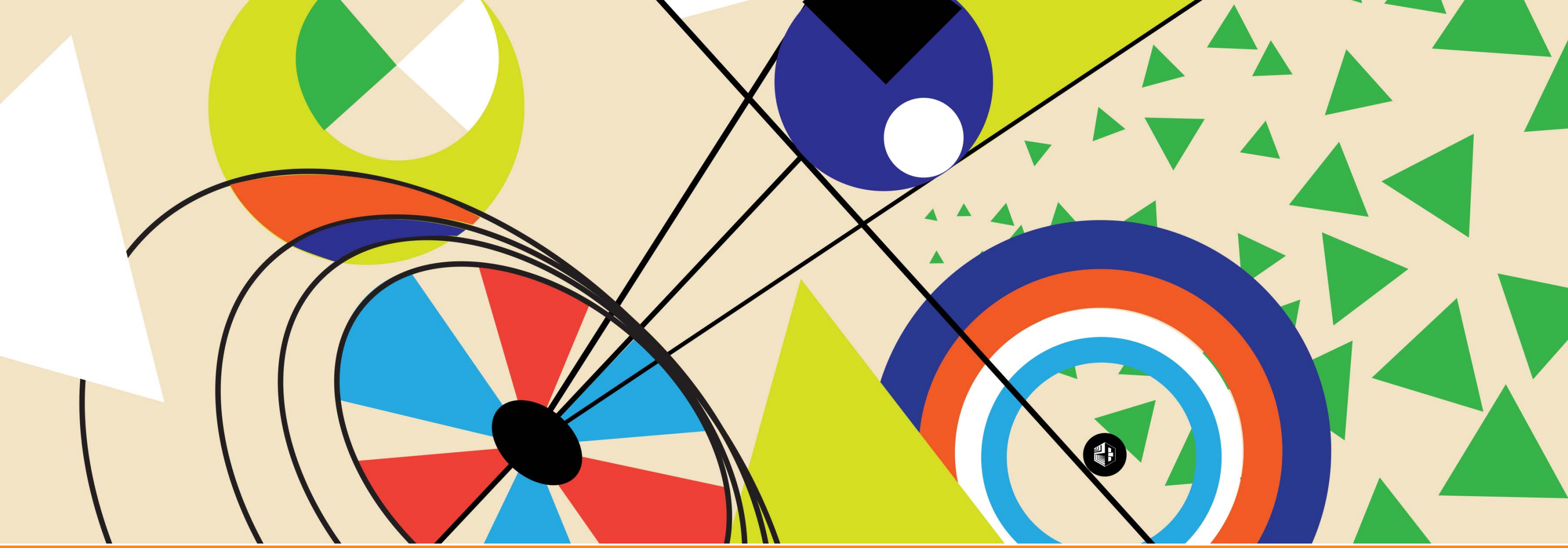


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

Unidad 1. La geometría del triángulo

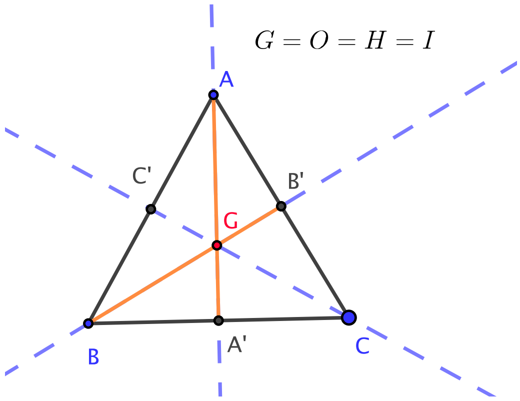
Puntos y rectas notables

Proposición 0.1

En todo triángulo equilátero, el incentro, centroide, ortocentro y circuncentro coinciden.

Demostración

Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero, es decir $AB = BC = CA$ y sus tres ángulos son iguales. Tracemos los puntos medios A', B' y C' de los lados BC, CA y AB respectivamente, luego tracemos las medianas AA' y BB' de los lados BC y CA respectivamente, por tanto, su intersección es el centroide G del triángulo.



Ahora sabemos que un punto P está en la mediatriz de un segmento AB si $AP = PB$. De aquí se sigue que el punto A está en la mediatriz de BC, de igual forma el punto B está en la mediatriz del segmento CA. Ahora, por definición las mediatrices son las rectas que pasan por el punto medio de un segmento y que son perpendiculares a él, por lo que las mediatrices de los segmentos BC y CA pasan por A' y B' respectivamente. Así tenemos que la mediatriz de BC es la recta que pasa por A y por A', de igual manera la mediatriz de CA es la recta que pasa por B y B'. Por tanto AA' y BB' son mediatrices de los segmentos BC y CA respectivamente, las cuales por ser mediatrices son perpendiculares a dichos segmentos. Luego la intersección de las mediatrices es el circuncentro O del triángulo. Luego $G = O$.

De lo anterior se sigue que AA' y BB' son rectas perpendiculares, que pasan por A y B, a los segmentos BC y CA respectivamente, luego entonces AA' y BB' son alturas del $\triangle ABC$, cuya intersección es el ortocentro H. Por tanto $G = O = H$

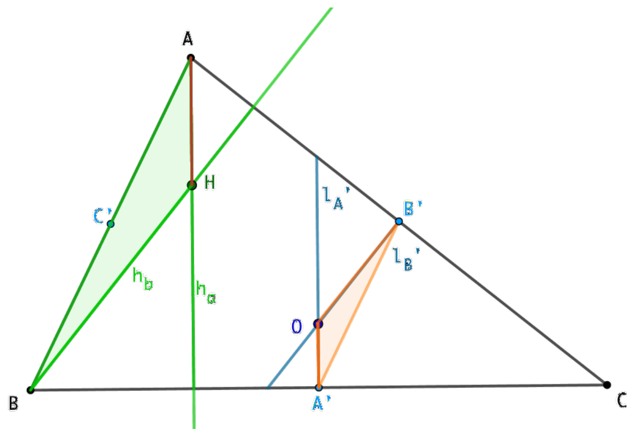
Ahora consideremos los triángulos $\triangle HBA'$, $\triangle HCA'$ y $\triangle HCB'$ los cuales son congruentes, así tenemos que $HA' = HB'$, con A' y B' pies de las perpendiculares sobre los lados BC y CA del ángulo $\angle ACB$, por tanto el punto H está en la bisectriz del ángulo $\angle ACB$. De manera análoga podemos ver que H está en las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle CBA$. Por lo que H es el incentro I de las bisectrices del triángulo $\triangle ABC$. Por tanto $G = O = H = I$. **QED.**

Lema 0.1

Sea ABC un triángulo. Sean H su ortocentro, O su circuncentro y A' el punto medio del lado BC, entonces $AH = 2A'O$

Demostración

Sea ABC un triángulo y sean h_a, h_b alturas y $l_{A'}$, $l_{B'}$ mediatrices del triángulo.
Trazamos el segmento $A'B'$ el cual, por pasar por los puntos medios de los lados del triángulo ABC, es paralelo a AB. Además tenemos que $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$ con razón de semejanza $2:1$.
De aquí se sigue que $\triangle AHB \approx \triangle A'OB'$ pues sus lados correspondientes son paralelos. Entonces $AB = 2A'B'$, luego $AH = 2A'O$. **QED**



La recta de Euler

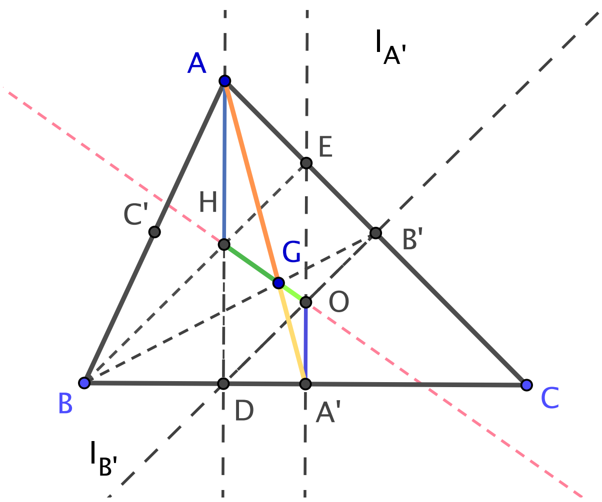
En la sección anterior demostramos que en un triángulo equilátero, el incentro, centroide, ortocentro y circuncentro coinciden. ¿Existirán otros triángulos, no equiláteros, en los que estos puntos sean colineales?¿Cuáles serían las condiciones para que esto suceda, o bien para que al menos una terna de estos puntos sean colineales?

Teorema 0.1

En todo triángulo [no equilátero], el circuncentro, centroide y ortocentro son colineales y la distancia del ortocentro al centroide es el doble de la distancia del centroide al circuncentro.

Demostración

Sea ABC un triángulo y sean A', B' y C' puntos medios de los lados BC, AC y AB respectivamente. Trazamos las medianas AA' y BB', las cuales se intersectan en el centroide G. Luego trazamos las alturas AD y BE, con D y E pies de dichas alturas que además se intersecan en el ortocentro H del triángulo. Finalmente trazamos las mediatrices $l_{A'}$ y $l_{B'}$ que se intersecan en el circuncentro O del triángulo.
Por un lema anterior sabemos que $AH = 2A'O$, con A' punto medio de BC. Además sabemos que el centroide G triseca a las medianas por lo que



$AG = 2GA'$. También tenemos que las rectas AD y $l_{A'}$ son paralelas por construcción y la recta AA' es transversal a las paralelas anteriores, por lo que $\angle GA'O = \angle HAG$. De aquí tenemos por el criterio de semejanza LAL que $\triangle AHG \approx \triangle A'OG$ con una razón de semejanza 2:1. En particular tenemos que $\angle AGH = \angle A'GO$, y como A, G y A' son colineales y G es vértice común de los lados tenemos que G debe estar sobre la recta HO por lo tanto H, G y O son colineales y $HG = 2GO$. **QED.**

Cabe mencionar que si el triángulo es equilátero, el circuncentro, el centroide y el ortocentro no sólo son colineales si no que además coinciden, como ya lo demostramos en la proposición anterior.

Definición 0.1

La recta donde se encuentran el circuncentro, el centroide y el ortocentro de un triángulo se conoce como la **Recta de Euler**

♣

Ejercicios para ir pensando

1. Demuestra que si en un triángulo coinciden un par entre la mediana, la altura y la bisectriz de uno de sus lados, entonces la tercera de éstas coincide también y el triángulo es isósceles. Se sugiere que la demostración se haga por casos. Es decir,
   (a). Caso 1. Suponer que la mediana y la altura de un triángulo coinciden, por demostrar que la bisectriz también coincide y que el triángulo es isósceles.
   (b). Caso 2. Suponer que la mediana y la bisectriz coinciden. Por demostrar que la altura también coincide y que el triángulo es isósceles.
   (c). Caso 3. Suponer que la altura y la bisectriz coinciden. Por demostrar que la mediana también coincide y que el triángulo es isósceles.
2. Demuestra que en un triángulo isósceles, el incentro, centroide, ortocentro y circuncentro son colineales.
3. Diga, ¿cuáles de los siguientes puntos: circuncentro, centroide, ortocentro, incentro, excentros, están dentro del triángulo y cuáles siempre están afuera? Establezca las condiciones para las diferentes posiciones relativas al triángulo de aquellos que no siempre están afuera o dentro.