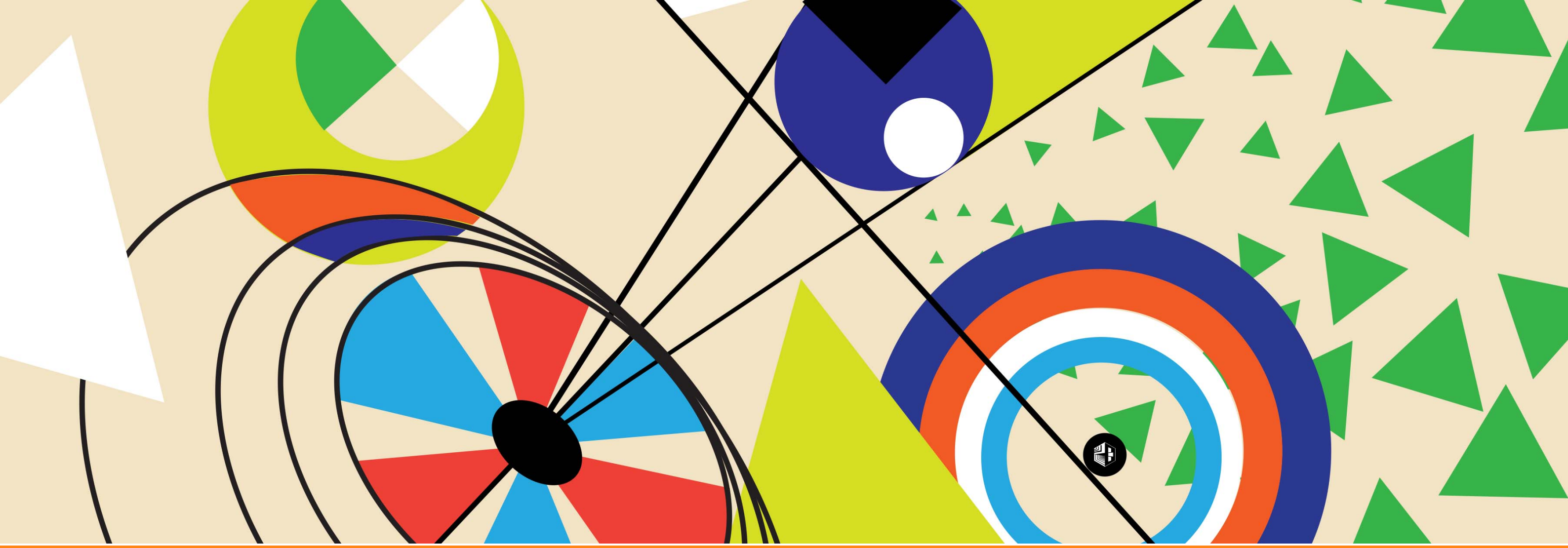


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

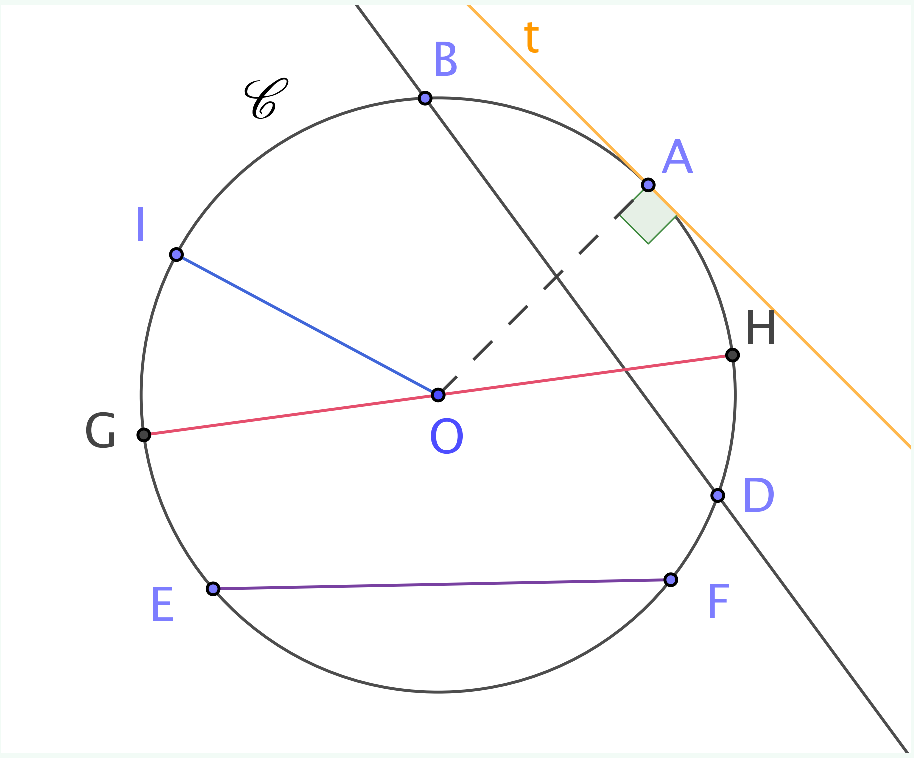
Unidad 2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

Rectas notables en la circunferencia

En la actividad 1 de la semana revisaste los siguientes conceptos básicos para esta unidad.

Definición 0.1. Rectas notables en la circunferencia

- *Dada una circunferencia $\mathscr{C}$ con centro en O, a un segmento que une el centro O de la circunferencia con un punto cualquiera de la circunferencia se le llama radio.*
- *Dada una circunferencia $\mathscr{C}$ con centro en O y radio r, si consideramos el radio OA y una recta t perpendicular al radio en el extremo A, entonces t se conoce como la recta tangente a la circunferencia*
- *A cualquier segmento de recta AB que tenga sus extremos sobre la circunferencia y que pase por el centro de la circunferencia se le llama diámetro.*
- *A cualquier segmento de recta AB que tenga sus extremos sobre la circunferencia y que no sea diámetro se le llama cuerda.*
- *A una recta que corta a la circunferencia en dos puntos le llamamos recta secante.*



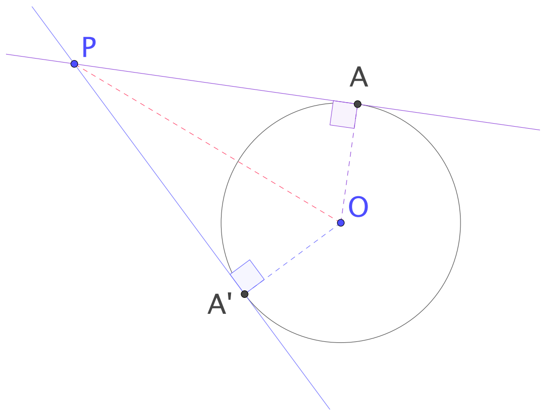
♣

Proposición 0.1

Dadas dos rectas tangentes a la circunferencia $\mathscr{C}$ desde un mismo punto P, se tiene que $PA = PA'$, con A y A' los puntos de tangencia. Además el centro de la circunferencia está sobre la bisectriz del ángulo formado por las rectas.

Demostración

Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro en O. Consideremos las tangentes a la circunferencia desde un mismo punto P. Observemos que obtenemos los triángulos rectángulos $\triangle PAO$ y $\triangle PA'O$, los cuales son congruentes, pues tienen un cateto igual (radio de la circunferencia) y la hipotenusa en común. Por tanto $PA = PA'$ y O está en la bisectriz pues $\angle A'PO = \angle OPA$. **QED**



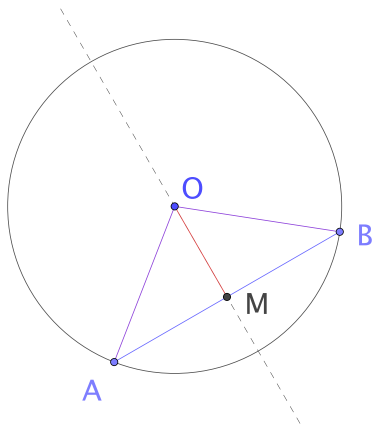
De igual forma en la sesión anterior discutimos los siguientes resultados. De algunos de ellos presentaremos las demostraciones en estas notas, los demás se dejan como actividad para el alumno.

Proposición 0.2

La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia

Demostración

Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro en O. Sean A y B extremos de la cuerda AB, con A y B sobre $\mathscr{C}$. Trazamos el punto medio M de AB, el cual por definición sabemos está en la mediatriz del segmento AB. Por otra parte, trazamos los segmentos OA y OB, de los cuales podemos afirmar que $OA = OB$ por ser radios de $\mathscr{C}$, de donde se sigue que O es un punto que está en la mediatriz de AB, (por un lema de la unidad anterior), así la mediatriz de AB es la recta OM.



Por tanto la mediatriz de AB pasa por el punto O, centro de la circunferencia. **QED**

Proposición 0.3

La perpendicular a una cuerda por el centro de la circunferencia la biseca.

Demostración

La demostración se deja como actividad de aprendizaje para el alumno.

Proposición 0.4

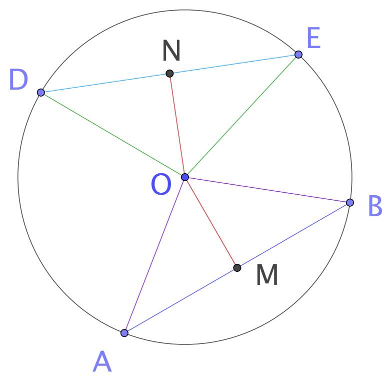
En una misma circunferencia, dos cuerdas tienen la misma longitud si y sólo si son equidistantes del centro.

Demostración

$\Rightarrow$] La demostración de la ida se deja como actividad para el estudiante.

A continuación se demuestra el regreso.

$\Leftarrow$] Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro en O y AB y DE dos cuerdas de la circunferencia tales que equidistan del centro, queremos demostrar que las cuerdas AB y DE tienen la misma longitud.



Consideremos los segmentos OM y ON, con M y N pies de las perpendiculares de AB y DE por O respectivamente, entonces por hipótesis $OM = ON$.

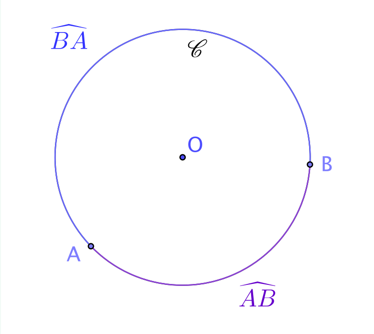
Consideremos ahora $\triangle OAB$ y $\triangle ODE$ los cuales son isósceles pues $OA = OB = OD = OE$ son radios de la circunferencia $\mathscr{C}$. Además OM y ON son alturas de estos triángulos por lo que $\triangle OAM \cong \triangle OBM$ y $\triangle ODN \cong \triangle OEN$, todos ellos triángulos rectángulos, por lo que es fácil ver, tomados dos a dos que $\triangle OAM \cong \triangle OBM \cong \triangle ODN \cong \triangle OEN$, por lo que $AM = MB = DN = NE$.

Por tanto $AB = DE$, que es lo que queríamos demostrar. **QED**

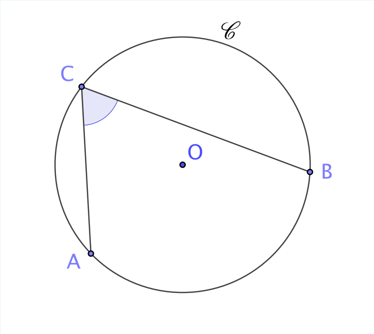
Ángulos inscritos en la circunferencia

Definición 0.2. Ángulos inscritos en la circunferencia

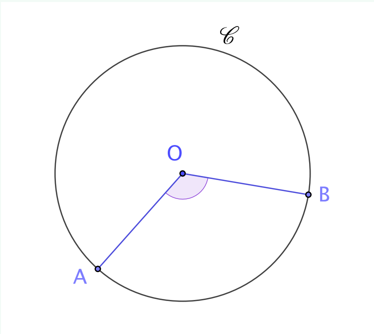
- *Si tomamos dos puntos A y B sobre una circunferencia, éstos determinan dos arcos. Los cuales se definen en sentido contrario a las manecillas del reloj. Así tenemos los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BA}$.*



- *Al ángulo formado por dos cuerdas que tienen un extremo común sobre la circunferencia se le llama ángulo inscrito. Los extremos no comunes de las cuerdas definen un arco al que llamaremos arco (que abre) del ángulo inscrito.*



- *Al ángulo formado por dos radios se le llama ángulo central. La medida de un ángulo central es la misma que la del arco que subtiende.*



♣

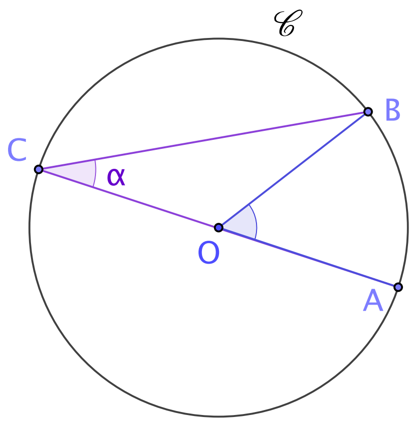
Teorema 0.1. De la medida del ángulo inscrito

La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, es la mitad del ángulo central que abre el mismo arco. ♡

Demostración La demostración de este teorema la haremos por casos. El primer caso es cuando un lado del ángulo inscrito pasa por el centro de la circunferencia. El segundo, cuando el centro de la circunferencia es un punto interior del ángulo inscrito. El tercer caso se da cuando el centro de la circunferencia es un punto exterior del ángulo inscrito.

Caso 1. Un lado del ángulo inscrito pasa por el centro de la circunferencia.

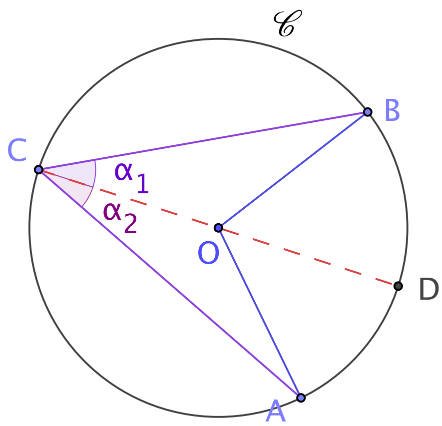
Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro en O. Sea $\angle ACB$ un ángulo inscrito tal que el lado AC pasa por el punto O. Consideremos el triángulo $\triangle BCO$, el cual es isósceles pues $OC = OB$ por ser radios de $\mathscr{C}$. Luego $\angle ACB = \angle OCB = \angle CBO$. Además sabemos que un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos, es decir, tenemos que $\angle AOB = \angle ACB + \angle CBO = 2\angle ACB$, o bien, $\angle ACB = \frac{1}{2}(\angle AOB)$, que es lo que queríamos demostrar.



Caso 2. Cuando el centro O está en el interior del ángulo inscrito.

Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro en O. Sea $\angle ACB$ un ángulo inscrito tal que el punto O está en el interior del ángulo.

Trazamos la cuerda CD tal que pase por el centro O. Así tenemos que el $\angle ACB$ queda dividido en dos partes por CD, obteniendo así los ángulos $\angle ACD = \angle\alpha_1$ y $\angle DCB = \angle\alpha_2$. Por lo demostrado en el caso 1, tenemos que $\angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD$ y $\angle DCB = \frac{1}{2}\angle DOB$. Luego $\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = \frac{1}{2}\angle AOD + \frac{1}{2}\angle DOB = \frac{1}{2}(\angle AOD + \angle DOB) = \frac{1}{2}\angle AOB$.



Caso 3. Cuando el centro O está en un punto externo del ángulo inscrito.

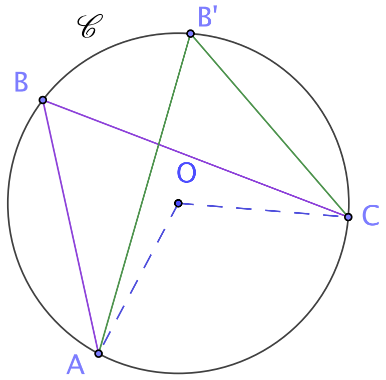
La demostración de este caso se deja como actividad para el alumno.

Corolario 0.1

Todos los ángulos inscritos que abren un mismo arco tienen la misma medida.

Demostración

Sea C una circunferencia con centro en O. Sean $\angle ABC$ y $\angle AB'C$ dos ángulos inscritos en C tales que abren un mismo arco $(\widehat{AC})$. Por el teorema anterior, $\angle ABC = \angle AB'C = \frac{1}{2}(\angle AOC)$.
QED

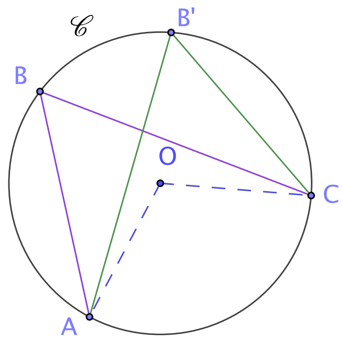


Corolario 0.2

Sean A y C dos puntos fijos sobre una circunferencia. Para cualesquiera dos puntos B y B' de la circunferencia se tiene que $\angle ABC = \angle AB'C$ o bien que $\angle ABC$ y $\angle AB'C$ son suplementarios.

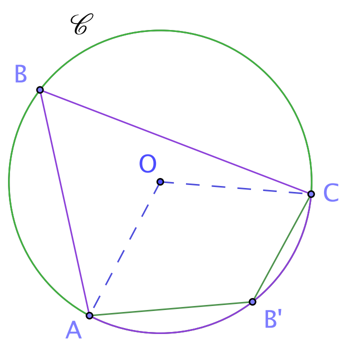
Demostración

Sea C una circunferencia con centro en O, sean A y C dos puntos fijos sobre C, y sean B y B' cualesquiera dos puntos de la circunferencia.



Si B y B' abren el mismo arco, por el teorema anterior tenemos que los ángulos inscritos miden, cada uno de ellos, la mitad del ángulo central $\angle AOC$, es decir, $\angle ABC = \angle AB'C = \frac{1}{2}(\angle AOC)$.

Ahora, si B y B' están en arcos diferentes, tenemos que $\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle AOC)$ y $\angle AB'C = \frac{1}{2}(\angle COA)$. Entonces al sumar los ángulos tenemos que $\angle ABC + \angle AB'C = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle COA) = \frac{1}{2}(360) = 180$.
Por lo tanto, los ángulos son suplementarios.



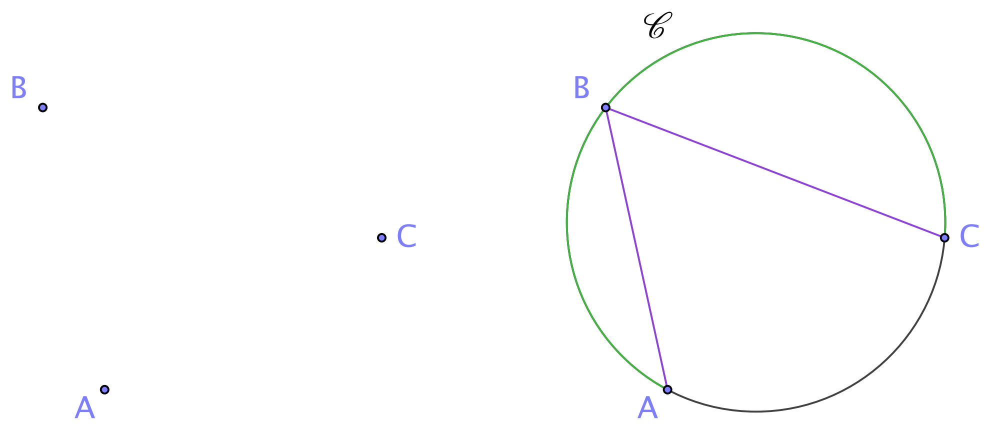
Corolario 0.3

Sean A y C dos puntos fijos. El conjunto de puntos B que cumplen que el ángulo ABC es constante, consta de dos arcos de circunferencia del mismo radio.

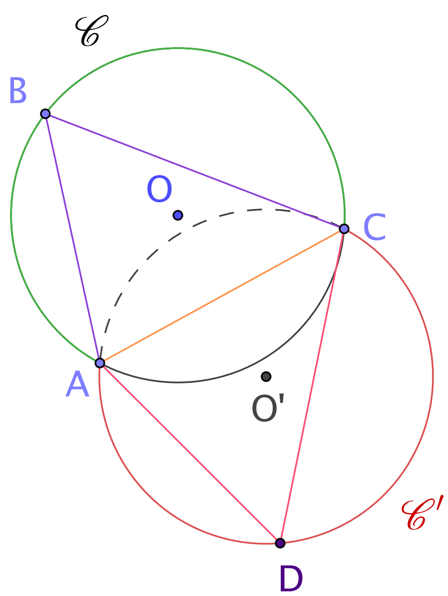
Demostración

Sean A y C dos puntos fijos. Supongamos que B es un punto en el conjunto P de puntos que cumplen que el ángulo ABC es constante.

Construyamos el circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$. Los puntos A y C dividen a la circunferencia en dos arcos, en uno de ellos se encuentra B y los puntos en ese arco cumplen, por el corolario anterior, que $\angle ABC$ es constante. Por lo que esos puntos están en el conjunto P.



(a) (b)



Ahora reflejemos ese arco con respecto de la recta AC. Así consideremos un punto D cualquiera en el arco reflejado, de tal forma que por el mismo corolario anterior se tiene que $\angle CDA$ es constante, por lo que D está en P.

Hasta aquí hemos demostrado que los puntos B del arco $\widehat{CA}$ de $\mathscr{C}$ y los puntos D del arco $\widehat{AC}$ de $\mathscr{C}'$ están en P. Veamos ahora que sólo los puntos de estos dos arcos están en P.

Es decir, demostraremos que todo punto del conjunto P es un punto del arco $\widehat{CA}$ de $\mathscr{C}$ o del arco $\widehat{AC}$ de $\mathscr{C}'$. Esta demostración queda como actividad para el alumno, se sugiere abordarla por reducción al absurdo.

Ejercicios para ir pensando

1. Demuestra el siguiente corolario.

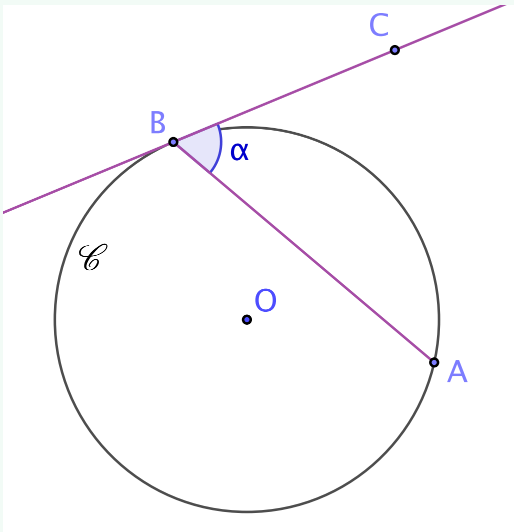
Corolario 0.4

Sean A y C dos puntos fijos, el conjunto de puntos B que cumplen que $\angle ABC$ es un ángulo recto es una circunferencia de diámetro AC.

Ángulos semi-inscritos

Definición 0.3

- *Un ángulo es semi-inscrito en un arco cuando su vértice es uno de los extremos del arco, uno de sus lados pasa por el otro extremo del arco y el segundo lado es tangente a la circunferencia.*



Ejercicios para ir pensando

1. Demuestre que si en una misma circunferencia, dos cuerdas tienen la misma longitud entonces son equidistantes del centro. (Enunciado de ida de la proposición 0.4).
2. Demuestra el siguiente teorema.

Teorema 0.2

Todo ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.