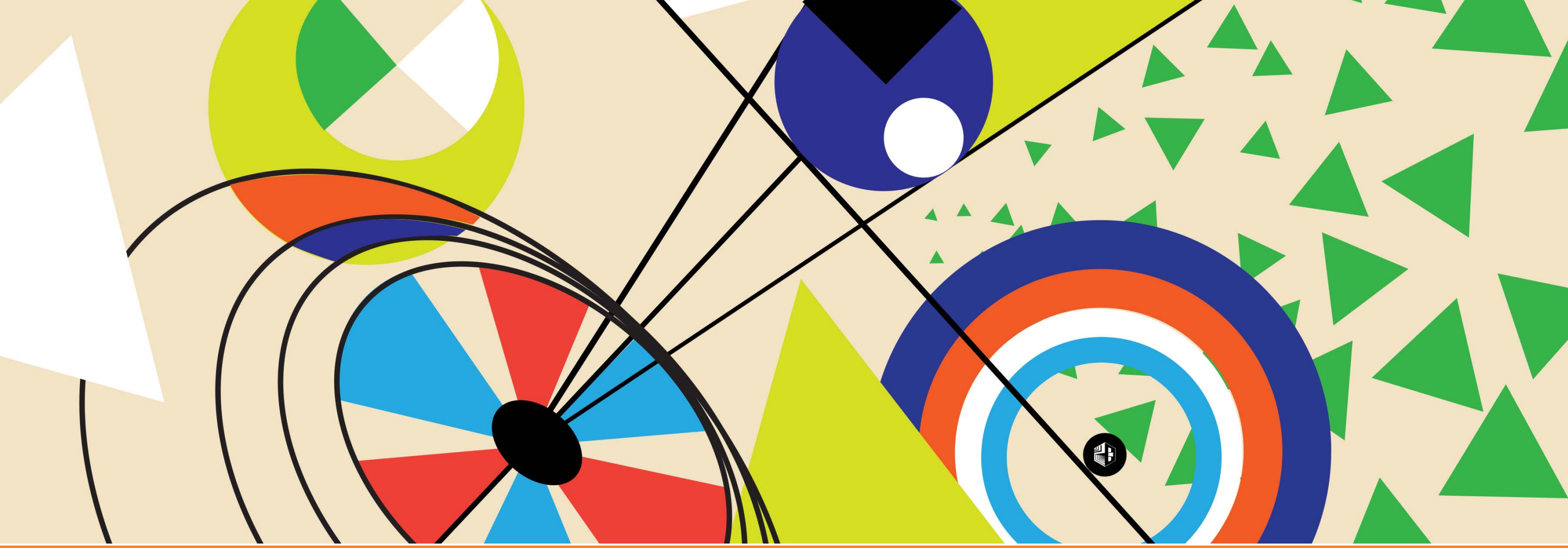


Geometría Moderna I

Material para el curso intersemestral en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

U2. Circunferencia y cuadriláteros cíclicos

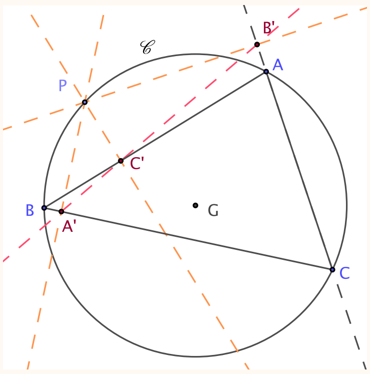
Cuadriláteros cíclicos

Definición 0.1

La proyección de un punto dado P sobre una recta l (segmento) dada se define como la intersección de la perpendicular que se levanta sobre la recta l y que pasa por el punto P. ♣

Teorema 0.1. Teorema de la línea de Simson

Si un punto se encuentra sobre el circuncírculo de un triángulo, entonces las proyecciones del punto sobre los lados del triángulo son colineales.



♡

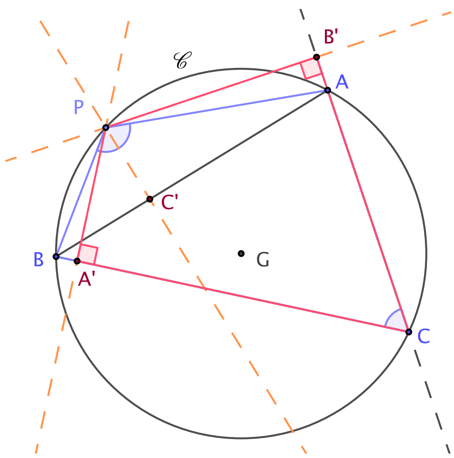
Demostración

Sea ABC un triángulo con circuncentro G y circuncírculo $\mathscr{C}$. Sea P un punto sobre $\mathscr{C}$ y sean A', B' y C' las proyecciones de P sobre los lados BC, CA y AC respectivamente. Una forma de ver que estos puntos son colineales es demostrar que $\angle BC'A' = \angle AC'B$.

Consideremos el cuadrilátero $APBC$, el cual es cíclico pues todos sus vértices están en $\mathscr{C}$. De aquí se sigue que $\angle BPA + \angle ACB = 180°$...(1).

Ahora en el cuadrilátero $PA'CB'$ se tiene (por construcción) que $\angle CA'P = \angle PB'C = 90°$, luego estos ángulos opuestos son suplementarios, por tanto el cuadrilátero es cíclico, de donde $\angle A'PB' + \angle B'CA' = 180°$...(2).

Además $\angle ACB = \angle B'CA'$, entonces de esto y, de (1) y (2) se sigue que $\angle ACB = \angle B'CA' = 180° - \angle BPA = 180° - \angle A'PB'$, es decir, $\angle BPA = \angle A'PB'$...(3).

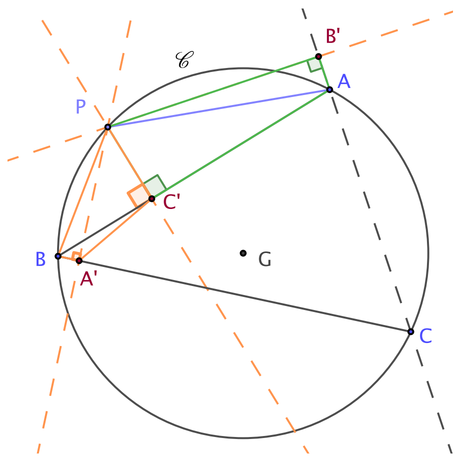


En el cuadrilátero $PC'AB'$ se tiene que los ángulos opuestos $\angle AC'P = \angle PB'A = 90°$ por lo que son suplementarios, es decir $\angle AC'P + \angle PB'A = 180°$...(4), por tanto el cuadrilátero es cíclico.

En el cuadrilátero $PBA'C'$ tenemos que las diagonales PA' y $C'B$ forman junto con los lados, los ángulos $\angle PA'B = \angle PC'B = 90°$.

Por tanto, el cuadrilátero es cíclico, luego

$\angle BC'A' = \angle BPA'$



Ahora $\angle BPA = \angle BPA' + \angle A'PA$ y

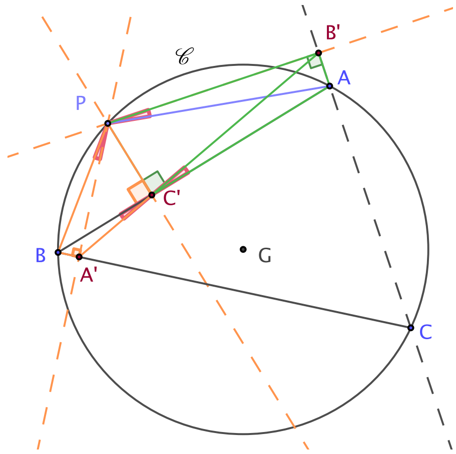
$\angle A'PB' = \angle A'PA + \angle APB'$,

entonces de (3) tenemos que $\angle BPA' = \angle APB'$, pero $\angle APB' = \angle AC'B'$.

Por tanto $\angle BC'A' = \angle AC'B'$.

Por lo tanto A', B' y C' son colineales.

QED



Teorema 0.2. Recíproco del Teorema de la línea de Simson

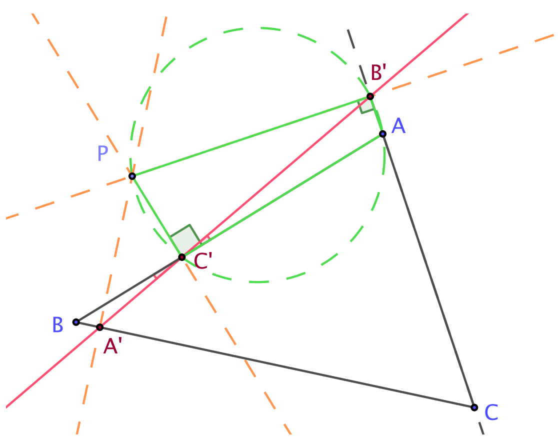
Si las proyecciones de un punto sobre los lados de un triángulo son colineales, entonces el punto se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo.

Demostración

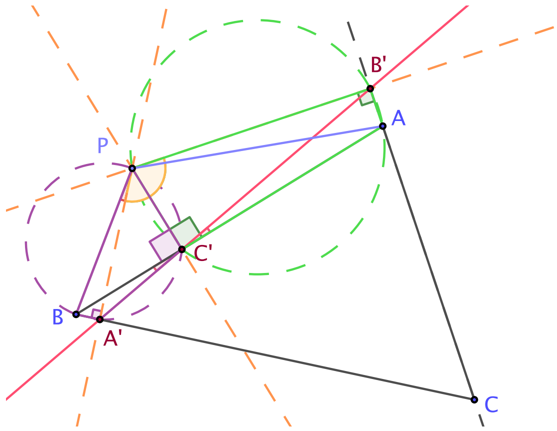
Sea l una recta tal que contiene a los puntos A', B' y C', proyecciones de un punto P sobre los lados BC, AC y AB de un triángulo $\triangle ABC$.

Como A', B' y C' son colineales y C' está sobre AB, tenemos que $\angle AC'B' = \angle BC'A'$...(1) por ser opuestos por el vértice C'.

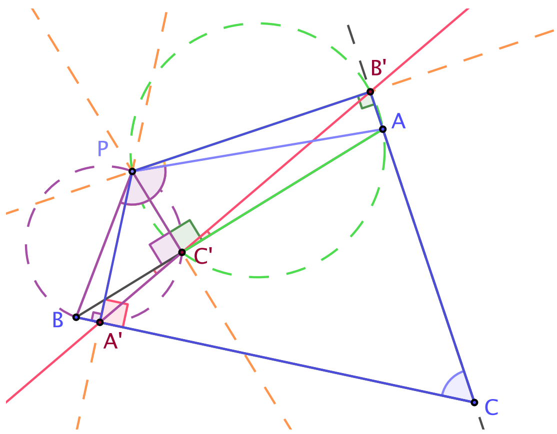
Consideremos el cuadrilátero $PC'AB'$, el cual es cíclico pues por construcción el $\angle AC'P = \angle PB'A = 90°$, es decir tiene sus ángulos opuestos suplementarios, por lo que $\angle AC'P + \angle PB'A = 180°$.



Consideremos los ángulos $\angle PC'B$ y $\angle PA'B$ los cuales miden $90°$. Ahora, sabemos que si se consideran dos puntos fijos (en este caso P y B), entonces el conjunto de puntos M que cumple que $\angle PMB$ sea un ángulo recto, es una circunferencia de diámetro PB. Por tanto el cuadrilátero $PBA'C'$ es cíclico.



Por el teorema relativo a los ángulos contenidos por una diagonal y un lado del cuadrilátero tenemos:
$\angle AC'B' = \angle APB'$ y $\angle BC'A' = \angle BPA'$, respectivamente.
Por (1) tenemos que $\angle APB' = \angle BPA'$. Sumamos en ambos lados de la igualdad $\angle A'PA$, entonces $\angle APB' + \angle A'PA = \angle BPA' + \angle A'PA$, es decir, $\angle A'PB' = \angle BPA$... (2).
Ahora por construcción $\angle CA'P = \angle PB'C = 90°$, por lo que el cuadrilátero $A'CB'P$ es cíclico. Por tanto $\angle A'PB' + \angle B'CA' = 180°$. Luego por (2) se tiene que $\angle BPA + \angle B'CA' = 180°$, los cuales son ángulos opuestos del cuadrilátero $APBC$. Por tanto $APBC$ es un cuadrilátero cíclico.

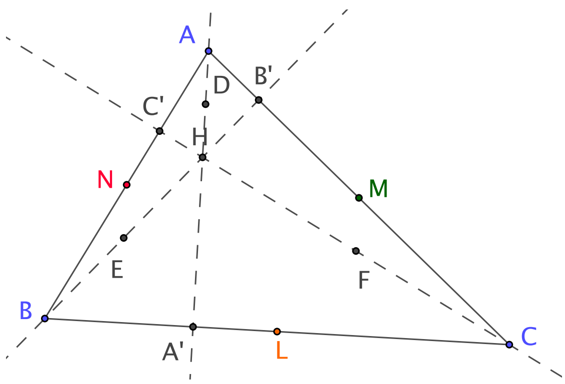


Teorema 0.3. Circunferencia de los nueve puntos

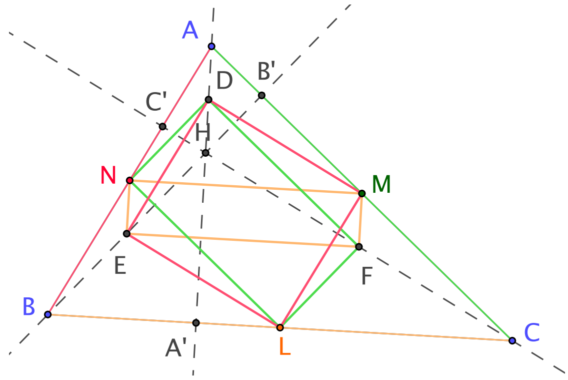
Los pies de las tres alturas de un triángulo ABC, los puntos medios de sus tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro, están en una circunferencia de radio $\frac{R}{2}$, donde R es el circunradio del triángulo ABC.

Demostración

Sea $\triangle ABC$ un triángulo con A', B' y C' pies de las alturas correspondientes a los vértices A, B y C respectivamente, y ortocentro H. Sean L, M, N puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente. Y sean D, E y F los puntos medios de los segmentos AH, BH y CH.

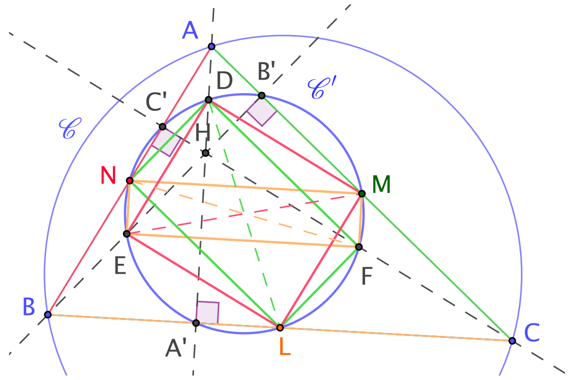


Sabemos que $NM \parallel EF$ y $NM = EF = \frac{BC}{2}$, por lo que el cuadrilátero $NEFM$ es un rectángulo[1], por lo tanto es cíclico.



De igual forma se tiene $NL \parallel DF$ y $NL = DF = \frac{AC}{2}$, por lo que el cuadrilátero $NLFD$ es un rectángulo, por lo tanto es cíclico. También $ML \parallel DE$ y $ML = DE = \frac{AB}{2}$, por lo que el cuadrilátero $DELM$ es un rectángulo, por lo tanto es cíclico.

Ahora bien, las diagonales DL, NF y EM son diagonales comunes de cada dos rectángulos, es decir, subtienden ángulos rectos, por lo que son diámetros de una misma circunferencia.



Por otra parte, si consideramos L y D puntos fijos y como el $\angle LA'D$ es recto, entonces A' está en la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $DNLM$. De igual forma $\angle EB'M$ es recto con puntos fijos E y M, por lo que B' está en la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $DELM$ y de manera análoga C' está en la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $FMNE$.

Por tanto, los nueve puntos mencionados están sobre la misma circunferencia, la cual será el circuncírculo $\mathscr{C}'$ del triángulo medial $\triangle LMN$.

Finalmente, ya hemos demostrado que el circunradio del triángulo medial $\triangle LMN$ es la mitad del circunradio del triángulo ABC.

Por tanto hemos demostrado lo que queríamos. **QED**

[1]¿Por qué podemos afirmar que NE y MF son perpendiculares a EF?