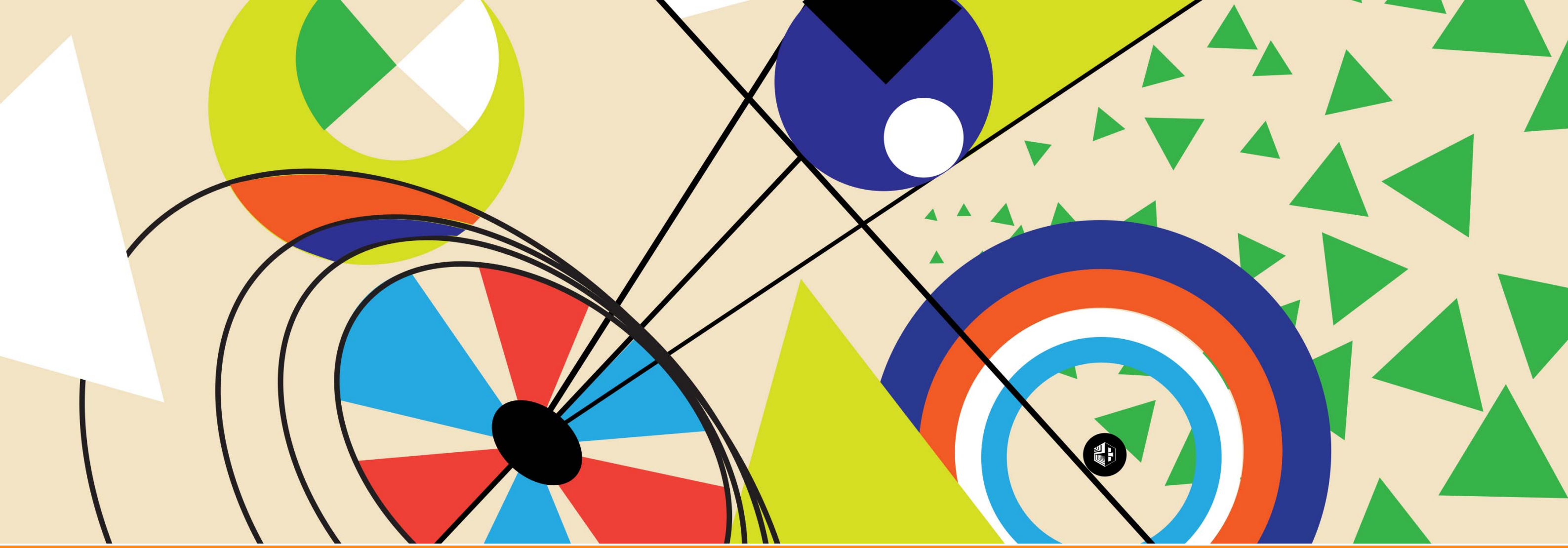


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

U3. Introducción a la geometría moderna

Segmentos dirigidos

Definición 0.1

Se habla de segmentos dirigidos cuando al segmento se le asigna un sentido, dada la dirección de la recta que lo comprende. Así, si AP es positivo entonces $PA = -AP$.

En otras palabras $AP + PA = 0$.

Notémos que si $P = A$, entonces $AP = 0$. ♣

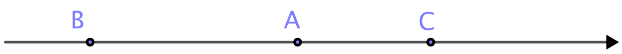
Proposición 0.1

Si A, B y C son puntos colineales, entonces $AB + BC = AC$. ♠

Nota *Si los segmentos determinados por los puntos colineales no son dirigidos, entonces la igualdad sólo se cumple cuando B está entre los puntos A y C. Por lo que al considerar segmentos dirigidos se busca demostrar que esta relación es válida sin importar la posición de los puntos sobre la recta que los contiene. ¿Cuántos casos se tendrían que considerar? ¿Cuántos y cuáles de ellos son análogos entre ellos? Dado esto, la prueba la realizaremos por casos.*

Demostración

Caso 1. Si el punto A está entre los puntos B y C, es decir B y C están en semirrectas diferentes determinadas por A.



En este caso se tiene que AB y AC tienen sentidos contrarios, y que BC y AC tienen el mismo sentido. Luego $AB + BC = -BA + BC = AC$.

La demostración para el caso en que B y C estén en posiciones invertidas es análoga. Es decir, la relación se cumple sin importar la posición de B y C siempre y cuando A esté en medio.

Caso 2. Si B y C están en la misma semirrecta determinada por el punto A, en particular, el punto C está entre los puntos A y B.

En este caso se tiene que AC y BC tienen sentidos opuestos, mientras que AC y AB tienen el mismo sentido. Luego $AB + BC = AB - CB = AC$. La demostración es análoga para el caso en que B está en medio de A y C.

Teorema 0.1. Fórmula de Chasles

Si A, B y C son puntos colineales, entonces $AB + BC + CA = 0$. ♡

Demostración De la proposición anterior tenemos que $AB + BC + CA = AC + CA$. Como $AC + CA = 0$, por tanto $AB + BC + CA = 0$.

Corolario 0.1

Si se consideran segmentos dirigidos y $AB = AC$, entonces $B = C$. ♡

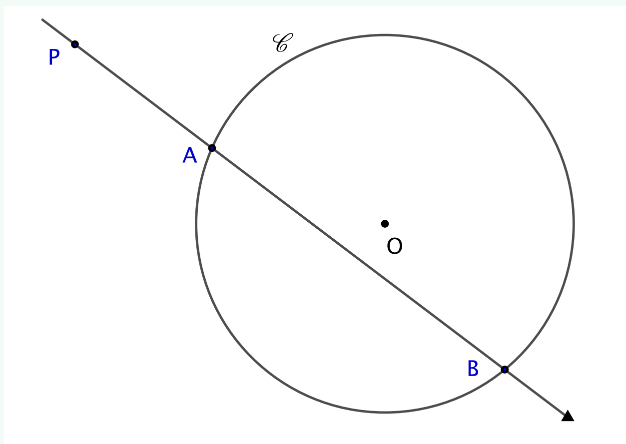
Potencia de un punto

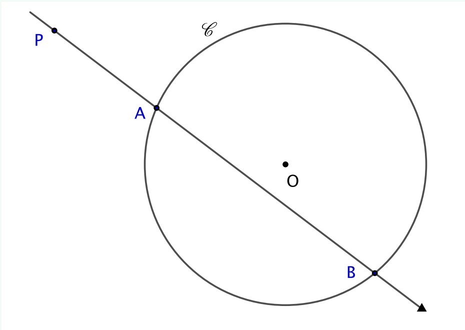
Definición 0.2

El producto de dos segmentos dirigidos se entiende como el producto de las longitudes de los segmentos considerando el sentido de éstos. Así, el producto de dos segmentos dirigidos será positivo si ambos segmentos se toman en la misma dirección (tienen el mismo sentido) y será negativo si se toman en direcciones contrarias (sentidos opuestos). ♣

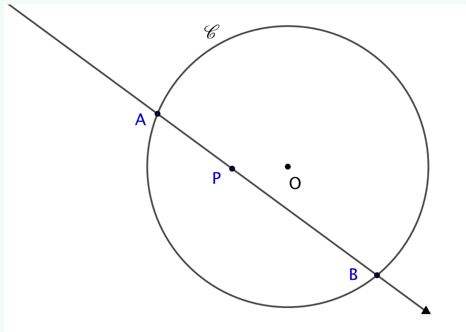
Definición 0.3

La potencia de un punto P con respecto a una circunferencia es el producto de los segmentos dirigidos, PA y PB, esto es, $PA \cdot PB$, donde A y B son las intersecciones de la circunferencia con una línea que pasa por P.

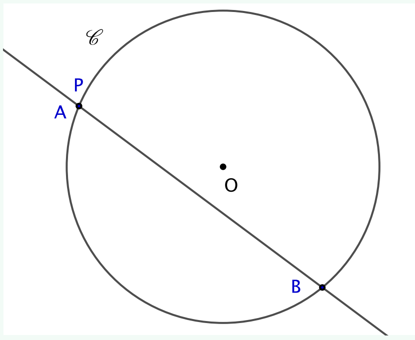




La potencia de un punto P será positiva si P está fuera de la circunferencia



La potencia de un punto P será negativa si P está dentro de la circunferencia



La potencia de un punto P será cero si P está sobre la circunferencia

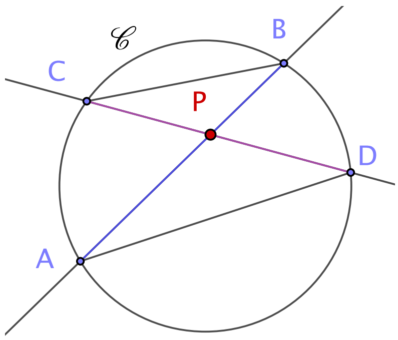
♣

Teorema 0.2

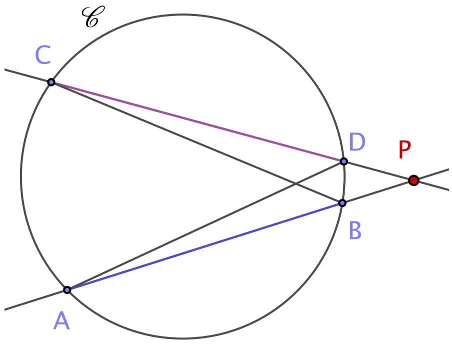
Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia $\mathscr{C}$ se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

♡

Demostración La demostración la haremos por casos.



Caso 1. Si el punto P está dentro de la circunferencia.
Si P está dentro de la circunferencia, trazamos los segmentos AD y BC. Luego $\angle DAP = \angle PCB$ pues abren arcos iguales. De igual forma, $\angle CBP = \angle PDA$. De aquí se tiene $\triangle PAD \approx \triangle PBC$. Esto implica que $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$.
Por tanto $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



Caso 2. Si el punto P está fuera de la circunferencia.
Si el punto P está fuera de la circunferencia, trazamos los segmentos AD y CB. Luego $\angle PAD = \angle BCP$ pues abren arcos iguales. Luego en $\triangle PAD$ y $\triangle PCB$ comparten el ángulo en P, esto es $\angle APD = \angle CPB$. Por lo que $\triangle PAD \approx \triangle PCB$, entonces $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$.
Por tanto $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

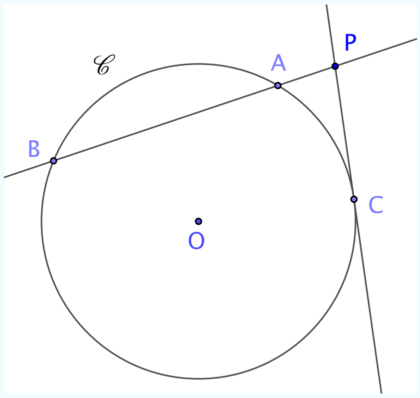
Caso 3. Si el punto P está sobre la circunferencia.

Si P está sobre la circunferencia tenemos que A o B coincide con P. Por lo que alguno de los segmentos PA o PB tiene longitud cero, análogamente C o D coincide con P, por lo que la igualdad $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ se cumple. **QED**

Nota *El valor de este teorema es que implica que la potencia de un punto P respecto de una circunferencia es constante.*

Proposición 0.2

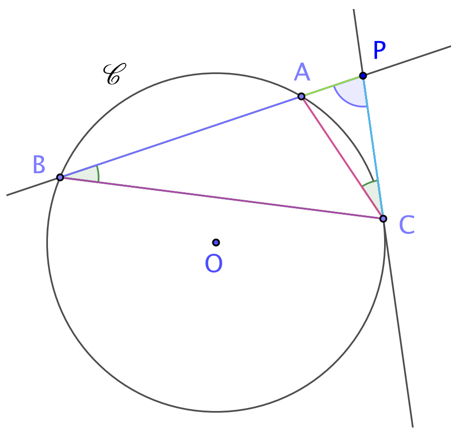
Si A, B y C son puntos sobre una circunferencia $\mathscr{C}$ y si la tangente en C intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $(PC)^2 = PA \cdot PB$.



Demostración

Sean A, B y C puntos en la circunferencia $\mathscr{C}$, tales que la prologación de la cuerda AB se interseca en un punto P con la tangente en C de la circunferencia.

Tracemos los segmentos AC y BC. Consideremos el $\angle CBA$ del $\triangle PBC$, el cual es inscrito y abre el arco $\widehat{CA}$. También consideremos $\angle PCA$ del $\triangle PAC$, el cual es semiinscrito y abre el arco $\widehat{CA}$. Como ambos subtienden el mismo arco, entonces $\angle CBA = \angle PCA$. Además, $\triangle PBC$ y $\triangle PAC$ tienen el ángulo en P común, es decir $\angle BPC = \angle APC$, por lo que por el criterio de semejanza AAA tenemos $\triangle PBC \approx \triangle PAC$. Luego, $\frac{BC}{AC} = \frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PC}$, entonces $(PC)^2 = PA \cdot PB$. **QED**



Ejercicios para ir pensando

1. La potencia de P con respecto a la circunferencia $\mathscr{C}$ de radio R es $d^2 - R^2$, donde d es la distancia de P al centro O. La potencia será positiva, cero o negativa dependiendo si P se encuentra fuera, sobre o dentro de la circunferencia.