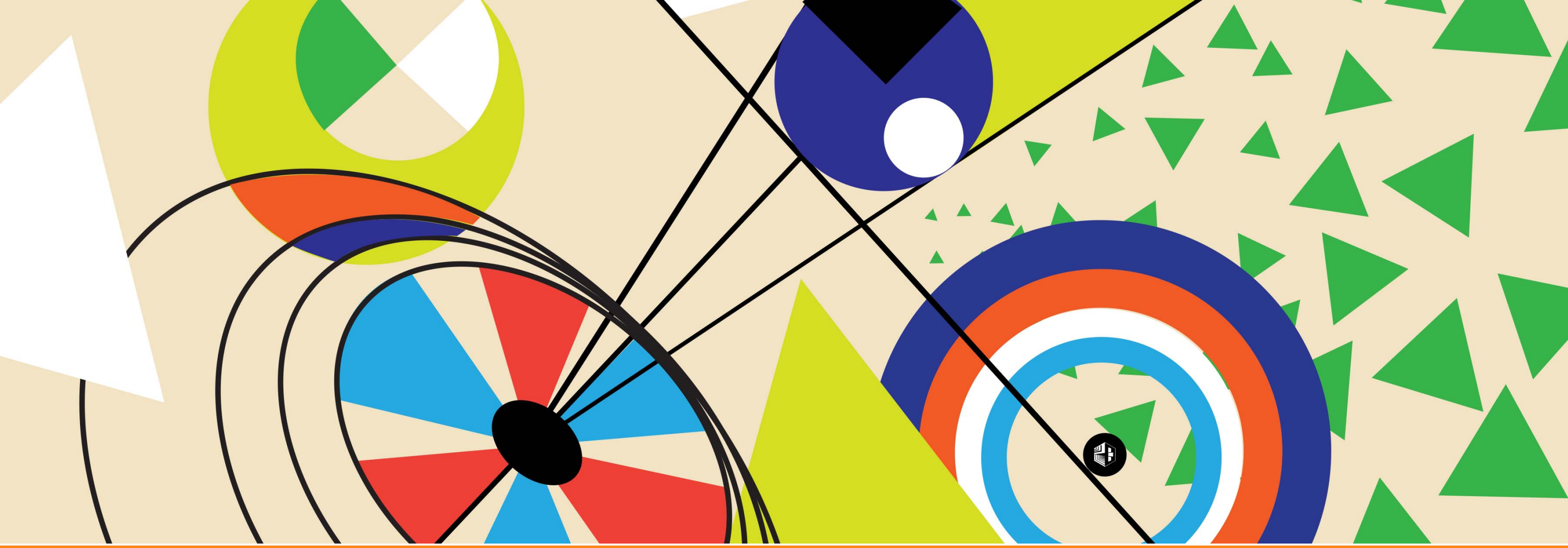


Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

U3. Introducción a la geometría moderna

Razón en que un punto divide a un segmento

Definición 0.1

Dado un segmento dirigido AB y un punto P, distinto de A y B, en la recta definida por A y B, se define la razón en que el punto P divide a un segmento AB como $r = \frac{AP}{PB}$.

♣

Ejemplo0.1 Consideremos la recta definida por los puntos A y B, tal que $AB = 12$ y $AP = 8$. Para encontrar la razón en que el punto P divide al segmento AB necesitamos conocer la longitud de PB, como sabemos que $AB = AP+PB$, esto es $12 = 8+PB$, entonces $PB = 4$. Luego $r = \frac{8}{4} = 2$. Esto nos dice que el segmento AP es dos veces el segmento PB.

Ejemplo0.2 Considerando los mismos datos del ejemplo anterior, ¿cuál es la razón en que el punto P divide al segmento BA?

Para encontrar la razón en que el punto P divide al segmento BA, partimos de que $AB = 12$, $AP = 8$ y $PB = 4$. Luego $r = \frac{BP}{PA} = \frac{-PB}{-AP} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$.

Observación Sin importar la dirección de la recta, se tiene que para cualquier punto P interior del segmento AB, los sentidos de los segmentos AP y PB son iguales (ambos positivos o ambos negativos), por lo que la razón r siempre será positiva. En este caso se dice que el punto P divide al segmento AB internamente.

Teorema 0.1

Si un punto P divide al segmento AB en la razón r, entonces P divide al segmento BA en la razón $r' = \frac{1}{r}$.

♡

Demostración Se deja como actividad para el alumno.

Problema: *Consideremos el punto M sobre la recta definida por A y B, tal que M es el punto medio de AB.*

1. *¿Cuál es la razón en que el punto M divide al segmento AB?*
2. *¿Cómo será la razón r en que un punto P divide a un segmento AB, si P está entre AM?*
3. *¿Cómo será r, si P está entre MB?*

Solución

1. *Como M es punto medio tenemos que $AM = MB$, entonces la razón en que M divide a AB es $r = \frac{AM}{MB} = 1$.*
2. *Si P está entre AM, entonces $AP < AM$, luego $AP < PB$, de donde $r = \frac{AP}{PB} < 1$. Notemos que r siempre será distinto a 0, salvo que $P = A$.*
3. *Si P está entre MB, entonces $AP > PB$, luego $r = \frac{AP}{PB} > 1$.*

Proposición 0.1

Sea AB un segmento dirigido y M su punto medio:

- *Si un punto P, está entre AM, entonces $r = \frac{AP}{PB} < 1$.*
- *Si P está entre MB, entonces $r = \frac{AP}{PB} > 1$.*

♠

Ejemplo0.3 Consideremos un punto P sobre la recta definida por A y B, tal que P es externo al segmento AB con $AB = 12$ y $AP = -8$. Luego $AB = AP + PB$, $12 = -8 + PB$, entonces $PB = 20$. Entonces $r = \frac{AP}{PB} = \frac{-8}{20} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$.

Observación Sin importar la dirección de la recta, se tiene que para cualquier punto P exterior del segmento AB, los sentidos de los segmentos AP y PB serán contrarios, por lo que la razón r siempre será negativa. En este caso se dice que el punto P divide al segmento AB externamente.

Proposición 0.2

Sea P un punto exterior al segmento dirigido AB, entonces la razón en que P divide al segmento AB será negativa, $r = \frac{AP}{PB} < 0$, pues AP y PB tienen sentidos opuestos. Además:

- *Si P está en la semirrecta, determinada por A, opuesta a B, entonces $r = \frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PA+AB}$ y $|AP| < |PA + AB|$ luego $-1 < r < 0$.*
- *Si P está en la misma semirrecta que B, entonces $r = \frac{AP}{PB} = \frac{AB+BP}{PB}$ y $|AB+BP| > |PB|$ luego $r < -1$.*

♠

Problema: *Dado un segmento AB y una razón r, ¿será posible encontrar siempre un punto P tal que divida al segmento AB en una razón dada?*

Teorema 0.2

Sean P y Q dos puntos en la recta determinada por A y B. Si P y Q dividen al segmento AB en la misma razón $r \neq -1$, entonces coinciden.

♡

Demostración

Sean P y Q puntos en la recta determinada por A y B, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} = r$. Consideremos los segmentos AB y AQ como suma de sus partes, entonces:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AB+BP}{PB} = \frac{AQ}{QB} = \frac{AB+BQ}{QB} ...(1)$$

$$\frac{AB}{PB} + (-1) = \frac{AB}{QB} + (-1)$$

$$AB \cdot QB = AB \cdot PB$$

$$QB = PB$$

Por tanto $P = Q$. **QED**

Teorema 0.3

Dado un segmento AB y $r \neq -1$, entonces existe un punto P que divide al segmento en la razón r. ♡

Demostración

Sea AB un segmento y r un número real, tal que $r \neq -1$.
Si P divide al segmento AB en la razón r, entonces $\frac{AP}{PB} = r$, de donde $AP = r \cdot PB ...(1)$.
Además $AB = AP + PB$, luego $AP = AB - PB$. Sustituimos AP en (1), $AB - PB = r \cdot PB$, luego $AB = (r \cdot PB) + PB = PB(r+1)$, por lo que $PB = \frac{AB}{r+1}$.
Así, hemos encontrado el valor de PB, el cual existe siempre y cuando $r + 1 \neq 0$, es decir, si $r \neq -1$, lo cual es parte de nuestra hipótesis. **QED**

Teorema 0.4

Dado un segmento AB, para cada razón $r \neq -1$, existe un único punto P, tal que $\frac{AP}{PB} = r$. Además,

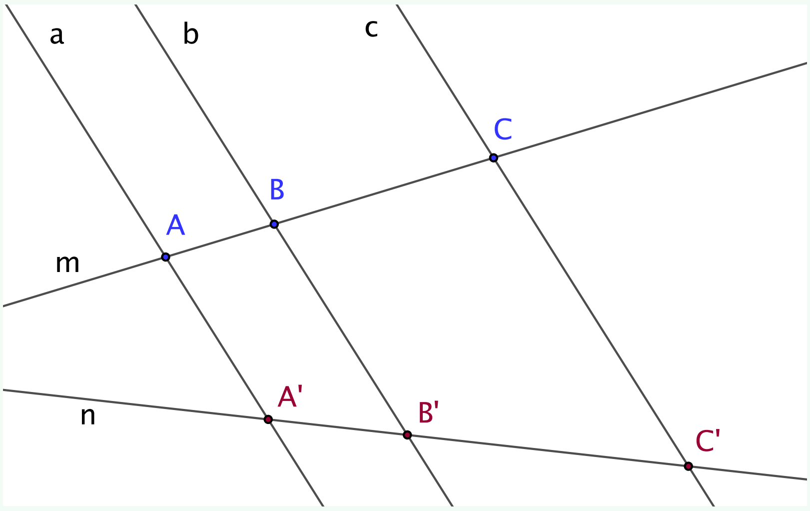
1. *Si $r > 0$, el punto P está en el interior del segmento AB.*
2. *Si $r < 0$ y $r \neq -1$, entonces P está en el exterior del segmento AB.* ♡

Ejercicios para ir pensando

1. ¿Existe un punto P que divida al segmento AB en la razón $r = 0$?
2. ¿Cómo es la razón r, si $P = B$?
3. Dado un segmento AB y una razón $r \neq -1$ ¿Cómo se localiza el punto P que divide a AB en la razón r?
4. Si A', B' y C' son las proyecciones paralelas de A, B y C en n, entonces se tiene que $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{A'C'}{C'B'}$. A continuación encontrarás la definición de proyecciones paralelas.

Definición 0.2

Sean m y n dos rectas cualesquiera y sean A, B y C tres puntos en m. Se llaman proyecciones paralelas de A, B y C sobre n a los puntos de intersección A', B' y C' en n, que se generan al trazar por los puntos A, B y C las paralelas a, b y c respectivamente.



♣