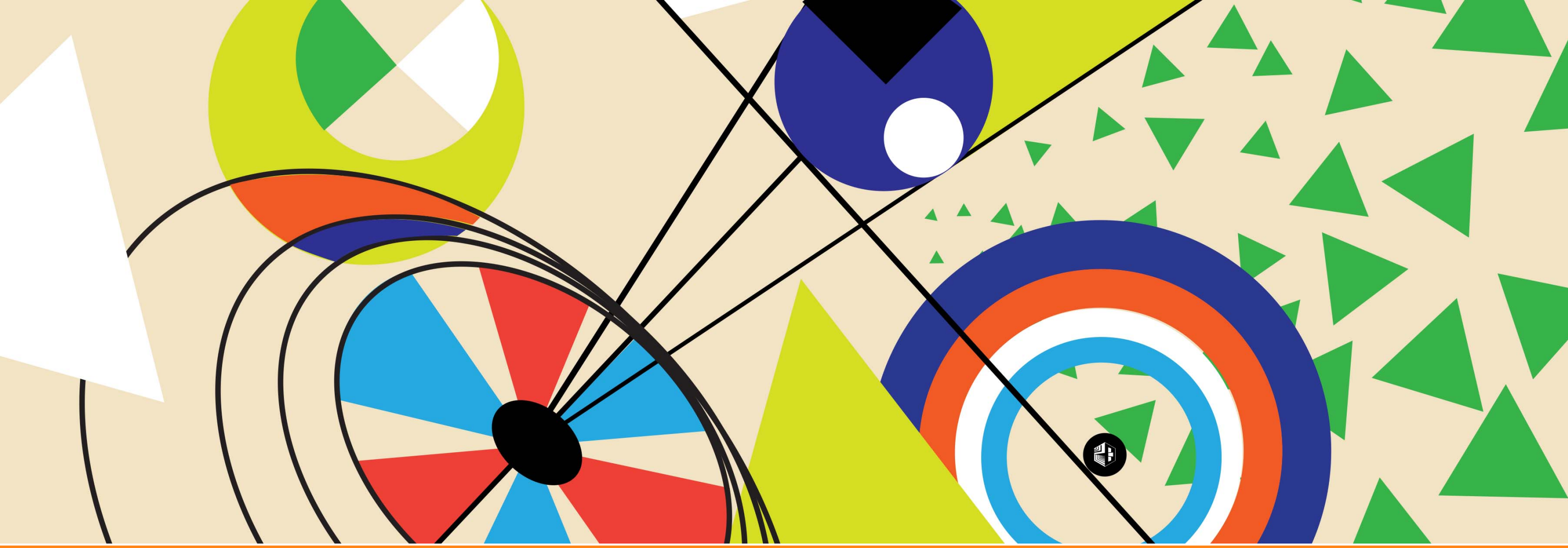


# Geometría Moderna I

## Material para el curso en línea


**Autor:** Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

**Instituto:** Facultad de Ciencias


**Fecha:** 2020


*Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320*

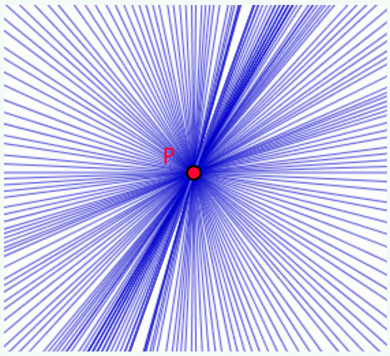
# U3. Introducción a la geometría moderna

## Puntos al infinito

La idea de punto al infinito surge de la necesidad de querer proyectar aquello que "se ve" por la "vista" a un plano euclidiano. De tal forma que ahora las rectas paralelas concurren en un punto ideal al que se le llama punto al infinito.

**Definición 0.1**

*Sea $P$ un punto cualquiera en el plano, se llama haz de rectas con vértice en $P$, o haz de rectas que pasa por $P$, al conjunto de rectas que pasan por $P$. El punto $P$ será el centro o vértice del haz de rectas.*




♣

**Definición 0.2**

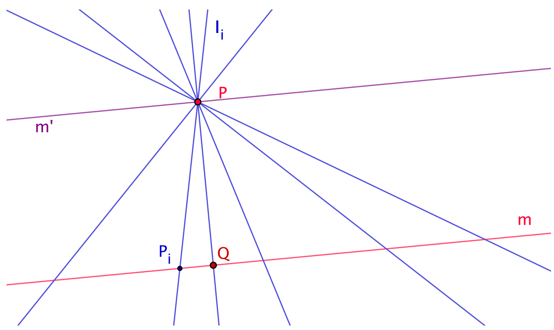
*Sea $m$ una recta cualquiera en el plano, se llama hilera de puntos en $m$, a cualquier conjunto de puntos en $m$.* ♣

**Teorema 0.1**

*Sean $m$ una recta y $P$ un punto que no está en $m$. Existe una correspondencia biunívoca entre las rectas del haz por $P$, excepto la paralela a $m$ y los puntos de la recta $m$.* ♡

**Demostración**

Sea $m'$ la paralela a $m$ por $P$. Sea $l_i$ una recta cualquiera distinta de $m'$ que pasa por $P$. Luego $l_i$ no es paralela a $m$ e interseca a $m$ en un único punto $P_i$. Establecemos la correspondencia $l_i \to P_i$, la cual es biunívoca ya que a cada recta $l_i$ le corresponde un único punto en $m$, el cual es la intersección con ella. Además dos rectas distintas por $P$ intersecan a $m$ en puntos distintos y para cualquier punto $P_j$ en $m$ existe la recta $PP_j$ en el haz por $P$.



¿Será posible establecer una correspondencia biunívoca entre el haz por $P$ y la recta $m$?

**Definición 0.3**

*Cada recta m posee un punto ideal, llamado punto al infinito de esa recta, el cual se define como el punto de intersección de m con todas sus rectas paralelas.* ♣

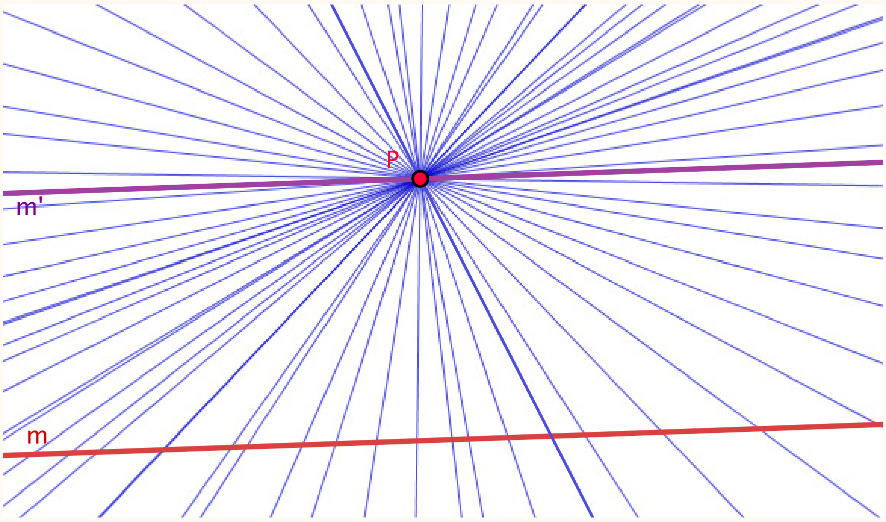
**Definición 0.4**

*Se define la recta al infinito (hilera al infinito) como el lugar geométrico de los puntos al infinito.* ♣

La inclusión del punto al infinito permite la ampliación del plano euclidiano. Además, dado que, ahora la recta $m'$ paralela a $m$ tiene asociado un punto de intersección con la recta $m$, el cual es el punto al infinito, entonces se puede establecer el siguiente teorema.

**Teorema 0.2**

*Sean $m$ una recta y $P$ un punto que no está en $m$. Existe una correspondencia biunívoca entre las rectas del haz por $P$ y los puntos de la recta $m$.*




♡

**Teorema 0.3**

*Cualesquiera dos puntos $P$ y $Q$ en el plano euclidiano ampliado determinan una única recta.* ♡

### Demostración

La demostración la haremos por casos. Recordemos primero, que en el plano euclidiano ampliado se han aumentado los puntos al infinito de cada recta y la recta al infinito.

**Caso 1. Los dos puntos $P$ y $Q$ son puntos cualesquiera, no puntos al infinito**

En este caso, por el postulado I de euclides sabemos que por dos puntos, $P$ y $Q$, pasa una única recta. Esta recta tiene que ser distinta a la recta al infinito, pues ésta queda determinada por los puntos al infinito. Por tanto la recta en el plano euclidiano ampliado que pasa por $P$ y $Q$ es única.

**Caso 2. Los dos puntos $P$ y $Q$ son puntos al infinito**

Si $P$ y $Q$ son puntos al infinito, éstos están en la recta al infinito. Además, sabemos que una recta, distinta a la recta al infinito, sólo contiene un punto al infinito, por tanto no existe otra recta que contenga a los dos puntos al infinito. Por tanto la recta en el plano euclidiano ampliado que pasa por $P$ y $Q$ es única.

**Caso 3. Alguno de los dos puntos es punto al infinito, digamos que $Q$ lo es.**

Como $Q$ es punto al infinito, entonces $Q$ es intersección de todas las rectas paralelas en una dirección dada y como por un punto $P$ sólo pasa una de esas recta paralelas (euclidiana), entonces la recta en el plano euclidiano ampliado que pasa por $P$ y $Q$ es única.

**Teorema 0.4**

*Cualesquiera dos rectas $m$ y $n$ en el plano euclidiano ampliado se intersecan en un único punto.* ♡

**Demostración**

**Caso 1. Las dos rectas $m$ y $n$ son rectas cualesquiera y no paralelas en el sentido euclidiano.**

Por definición de rectas paralelas (euclidianas) y por el postulado 1, las rectas $m$ y $n$ se intersecan en un único punto (ordinario). Dado que los otros puntos que se han agregado al plano euclidiano son puntos al infinito y como $m$ y $n$ son rectas no paralelas (ordinarias), entonces no comparten un punto al infinito. Por tanto, la intersección de las rectas es un único punto, ordinario en este caso.

**Caso 2. Las dos rectas $m$ y $n$ son paralelas en el sentido euclidiano.**

Por ser rectas paralelas en el sentido euclidiano no tienen un punto (ordinario) de intersección, pero tienen un punto en común en el plano euclidiano ampliado, es decir el punto al infinito. Por tanto el punto de intersección es único.

**Caso 3. Alguna de las dos rectas es recta al infinito, digamos que $n$ lo es.**

En este caso, $m$ es una recta (ordinaria) y $n$ es recta al infinito en el plano euclidiano ampliado, la cual contiene al punto de intersección de $m$ con cualquiera de sus paralelas, es decir al punto al infinito de $m$, luego estás dos rectas concurren en el punto al infinito de $m$ que es único.

## Puntos armónicos

**Definición 0.5**

*Si $P$ es un punto, distinto de $A$ y $B$, que divide al segmento $AB$ en una razón $r$ dada y $Q$ divide al mismo segmento en la razón $-r$, se dice que el punto $Q$ es el conjugado armónico de $P$ con respecto de $AB$. Es decir, $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$.* ♣