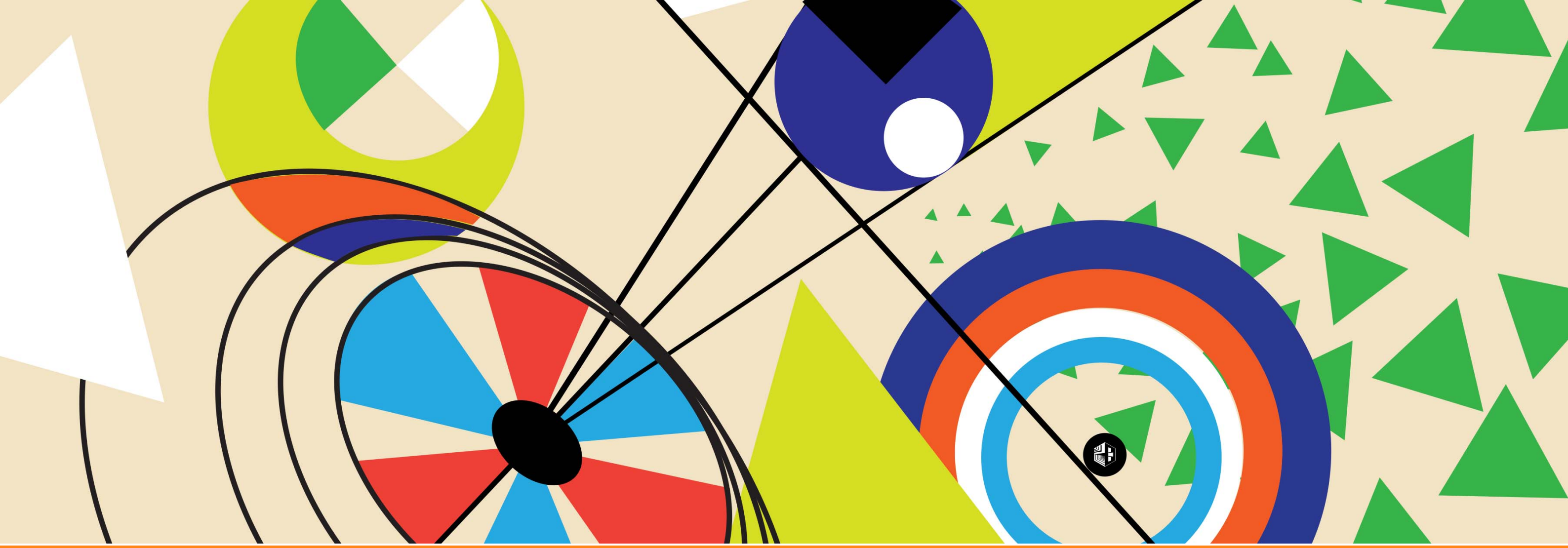


# Geometría Moderna I

## Material para el curso en línea


**Autor:** Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

**Instituto:** Facultad de Ciencias



**Fecha:** 2021

*Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721*

# U3. Introducción a la geometría moderna

## Segmentos dirigidos

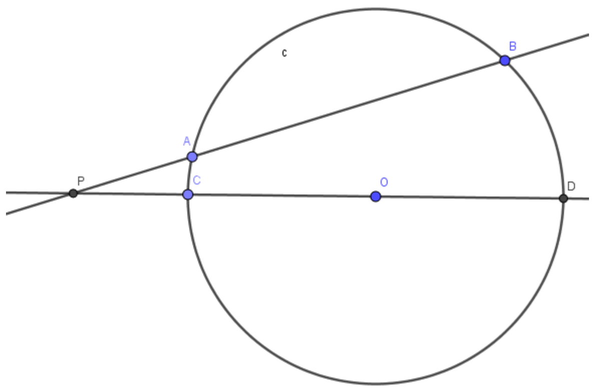
**Teorema 0.1**

*La potencia de un punto $P$ con respecto a una circunferencia de radio $r$ es $d^2 - r^2$, donde $d$ es la distancia de $P$ al centro $O$ de la circunferencia.*
***Nota:****La potencia será positiva o negativa, o cero dependiendo de si P esta dentro o fuera de la circunferencia.*

**Demostración**

Sea $P$ un punto y una circunferencia con centro en $O$ y radio $r$. Sea $d$ la distancia de $P$ a $O$. P.d. $PA(PB) = d^2 - r^2$.
Sabemos por el teorema 0.2 de las notas 1, que la potencia de un punto $P$ respecto a una circunferencia es constante.

**Caso 1)** $P$ está afuera de la circunferencia.
Construimos un diámetro $CD$ que pase por $P$, entonces la potencia de $P$ es: $(PA)(PB) = (PC)(PD)$. Pero $PC = d - r$ y $PD = d + r \Rightarrow (PA)(PB) = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$ y como $PA$ y $PB$ son segmentos dirigidos con el mismo sentido entonces la potencia es positiva.




**Caso 2)** Si $P$ está en la circunferencia, la potencia será cero, entonces $d^2 - r^2 = 0$
**Q.E.D.**

**Ejercicio 1.-** La potencia de un punto $P$ con respecto a una circunferencia con centro en $O$ y radio $r$, es igual a $d^2 - r^2 = PT^2$, donde $d = PO$ y $PT$ es la longitud de la tangente desde $P$ a la circunferencia siempre que $P$ sea un punto exterior al círculo.

**Demostración**

Sea $P$ un punto exterior a la circunferencia con centro en $o$ y radio $r$. Como $P$ es punto exterior, por el caso 1 del teorema anterior la potencia de $P$ es $(PA)(PB) = d^2 - r^2$.
Sea $PT$ la recta tangente en el punto de contacto $T$, entonces se forma el $\triangle PTO$ pues $OT = r$ y el radio es perpendicular a la tangente.

Entonces por el teorema de Pitágoras $PO^2 = TO^2 + PT^2$, pero $TO^2 = r^2$ y $PO^2 = d^2$, entonces $d^2 = r^2 + PT^2$, entonces $PT^2 = d^2 - r^2$.

Por lo tanto $d^2 - r^2 = PT^2$