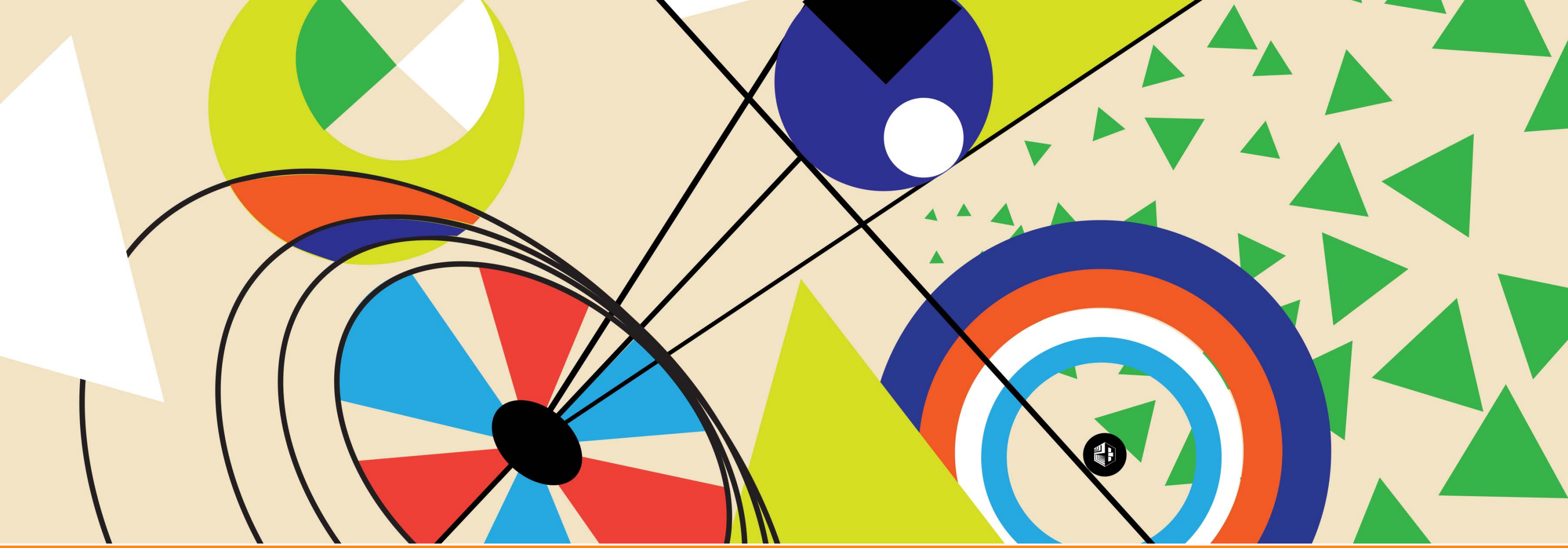


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

U3. Introducción a la geometría moderna

Puntos armónicos

Definición 0.1

El conjugado armónico del punto medio de un segmento es el punto al infinito de esa recta. Esto es, si Q es el punto al infinito de una recta que contiene al segmento AB, se define $\frac{AQ}{QB} = -1$.

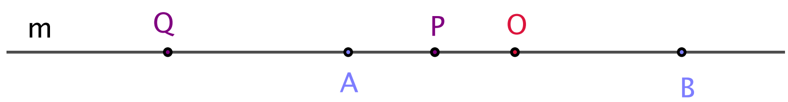
Esta definición nos permite establecer que dado un segmento AB, cualquier punto P, distinto de A y B tiene un único conjugado armónico Q respecto del segmento dado. ♣

Teorema 0.1

Si $(AB, PQ) = -1$ y O es el punto medio de AB, entonces $OB^2 = OP \cdot OQ$, e inversamente. ♡

Demostración

Sean A, B, P y Q cuatro puntos tales que $(AB, PQ) = -1$ y O es el punto medio de AB.



Como A, B, P y Q son una hilera armónica, tenemos:

$\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB} \Leftrightarrow \frac{AO+OP}{PO+OB} = -\frac{AO+OQ}{QO+OB}$.

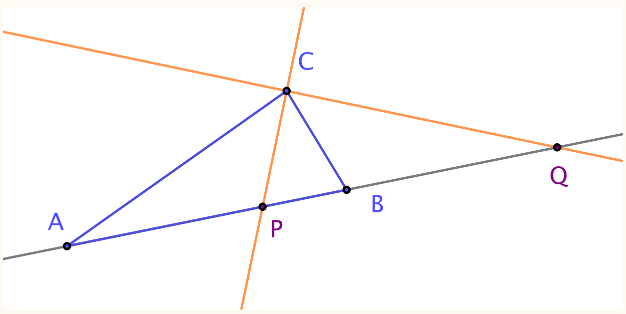
Pero, $AO = OB$, luego:

$\frac{OB+OP}{PO+OB} = -\frac{OB+OQ}{QO+OB} \Leftrightarrow \frac{OB+OP}{OB-OP} = -\frac{OB+OQ}{OB-OQ} \Leftrightarrow 2OB^2 = 2OP \cdot OQ \Leftrightarrow OB^2 = OP \cdot OQ$.

Por tanto queda demostrado (para ambos lados). **QED**

Teorema 0.2

Dado un triángulo cualquiera, los puntos en que las bisectrices interna y externa de cualquiera de sus ángulos cortan al lado opuesto, son conjugados armónicos con respecto a ese lado.



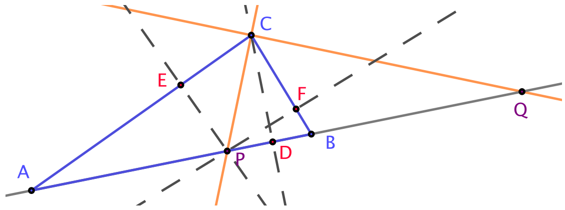
♡

Demostración

Sea ABC un triángulo y consideremos, sin pérdida de generalidad, las bisectrices interna y externa del vértice en C. Llamemos P y Q a los puntos de intersección de las bisectrices, interna y externa respectivamente, con el lado AB. Por demostrar que $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$.

Para demostrar lo que queremos, compararemos las áreas de los triángulos que nos permitan establecer las razones deseadas. Así, tracemos los segmentos perpendiculares a AB por C, a AC por P y a BC por P, llamemos a los pies de las perpendiculares D, E y F respectivamente.

De aquí tenemos que:



$(\triangle ACP) = \frac{(AP)(CD)}{2}$...(1) (tomando como base AP)

$(\triangle ACP) = \frac{(AC)(PE)}{2}$...(2) (tomando como base AC)

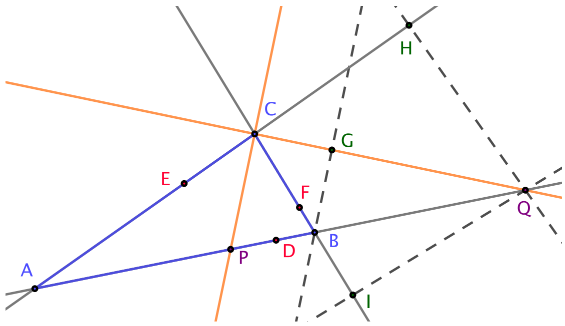
$(\triangle BCP) = \frac{(PB)(CD)}{2}$...(3) (tomando como base PB)

$(\triangle BCP) = \frac{(BC)(PF)}{2}$...(4) (tomando como base BC)

Por un lado, comparando las áreas de (1) y (3), tenemos $\frac{(\triangle ACP)}{(\triangle BCP)} = \frac{\frac{(AP)(CD)}{2}}{\frac{(PB)(CD)}{2}}$. Es decir, $\frac{(\triangle ACP)}{(\triangle BCP)} = \frac{AP}{PB}$.

Por otro lado, comparando las áreas de (2) y (4), tenemos $\frac{(\triangle ACP)}{(\triangle BCP)} = \frac{\frac{(AC)(PE)}{2}}{\frac{(BC)(PF)}{2}}$. Pero, $PE = PF$ pues P está en la bisectriz CP, por lo que, $\frac{(\triangle ACP)}{(\triangle BCP)} = \frac{\frac{(AC)(PE)}{2}}{\frac{(BC)(PE)}{2}} = \frac{AC}{BC}$. Por lo que $\frac{(\triangle ACP)}{(\triangle BCP)} = \frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BC}$...(*).

Ahora, consideremos los triángulos $\triangle ACQ$ y $\triangle BCQ$ formados por Q, y las alturas BG, QH y QI sobre QC, AC y CB respectivamente. De aquí tenemos:



$(\triangle ACQ) = \frac{(AQ)(CD)}{2}$...(5) (tomando como base AQ).

$(\triangle ACQ) = \frac{(AC)(QH)}{2}$...(6) (tomando como base AQ).

$(\triangle BCQ) = \frac{(BQ)(CD)}{2}$...(7) (tomando como base BQ).

$(\triangle BCQ) = \frac{(BC)(QI)}{2}$...(8) (tomando como base BQ).

Por un lado, comparamos las áreas de (5) y (7):
$\frac{(\triangle ACQ)}{(\triangle BCQ)} = \frac{\frac{(AQ)(CD)}{2}}{\frac{(BQ)(CD)}{2}} = \frac{AQ}{BQ}$.

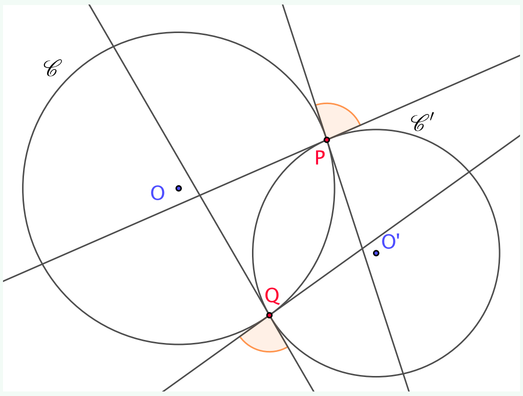
Por otro lado, comparando (6) y (8), tenemos que: $\frac{(\triangle ACQ)}{(\triangle BCQ)} = \frac{\frac{(AC)(QH)}{2}}{\frac{(BC)(QI)}{2}}$. Pero $QH = QI$ pues Q está en la bisectriz externa, por lo que $\frac{(\triangle ACQ)}{(\triangle BCQ)} = \frac{\frac{(AC)(QH)}{2}}{\frac{(BC)(QI)}{2}} = \frac{AC}{BC}$. Luego, $\frac{(\triangle ACQ)}{(\triangle BCQ)} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{AC}{BC}$.

De esta última igualdad y de (*), tenemos:
$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BC} = \frac{AQ}{BQ} \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} \Leftrightarrow \frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$.

Por lo tanto, (AB, PQ)=-1. **QED**.

Definición 0.2

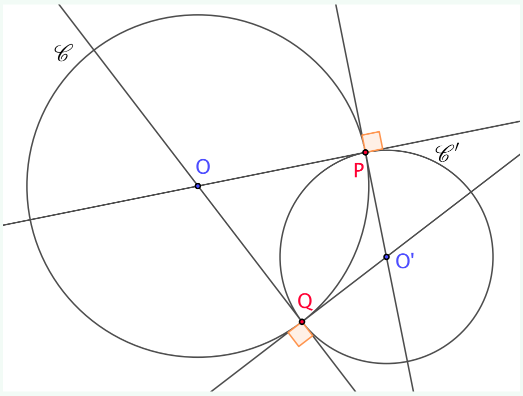
El ángulo de intersección de dos circunferencias es el ángulo entre sus tangentes en sus puntos de intersección.



♣

Definición 0.3

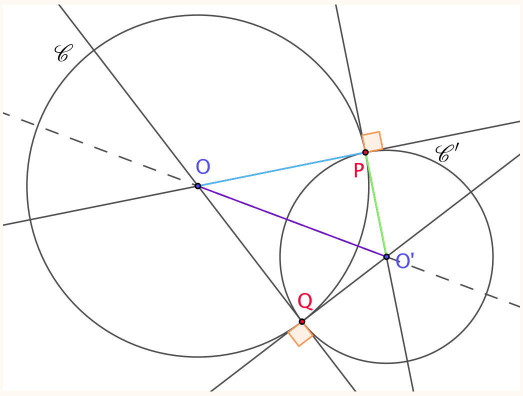
Dos circunferencias son ortogonales si su ángulo de intersección es recto; esto es, si sus tangentes en sus puntos de intersección son perpendiculares.



♣

Teorema 0.3

Si dos circunferencias son ortogonales entonces el cuadrado de la distancia entre sus centros es igual a la suma de los cuadrados de sus radios.



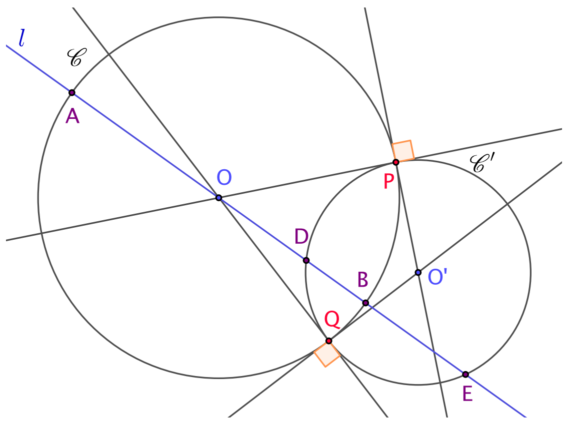
♡

Demostración La demostración se deja como actividad para el alumno.

Teorema 0.4

Si dos circunferencias ortogonales son cortadas por una recta que pasa por el centro de una de ellas, los cuatro puntos de intersección forman una hilera armónica.

Demostración



Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{C}'$ dos circunferencias ortogonales con centro O y O' respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de las circunferencias. Tracemos una recta l que pasa por O y que corte a ambas circunferencias, de esta forma obtenemos los puntos de intersección A y B en $\mathscr{C}$ y D y E en $\mathscr{C}'$.

Considerando el punto O y la circunferencia $\mathscr{C}'$, tenemos que la potencia de O respecto a esta circunferencia es $OD \cdot OE$. Por otra parte, como las circunferencias son ortogonales tenemos que OP es tangente a $\mathscr{C}'$, luego $OD \cdot OE = (OP)^2$. Además, $OP = OB$ pues son radios de $\mathscr{C}$, entonces $OD \cdot OE = (OB)^2$ y O es punto medio de AB, luego, por el teorema 0.1 de estas notas, se tiene que $(AB, DE) = -1$. Por tanto los cuatro puntos de intersección A, B, D y E forman una hilera armónica. **QED**