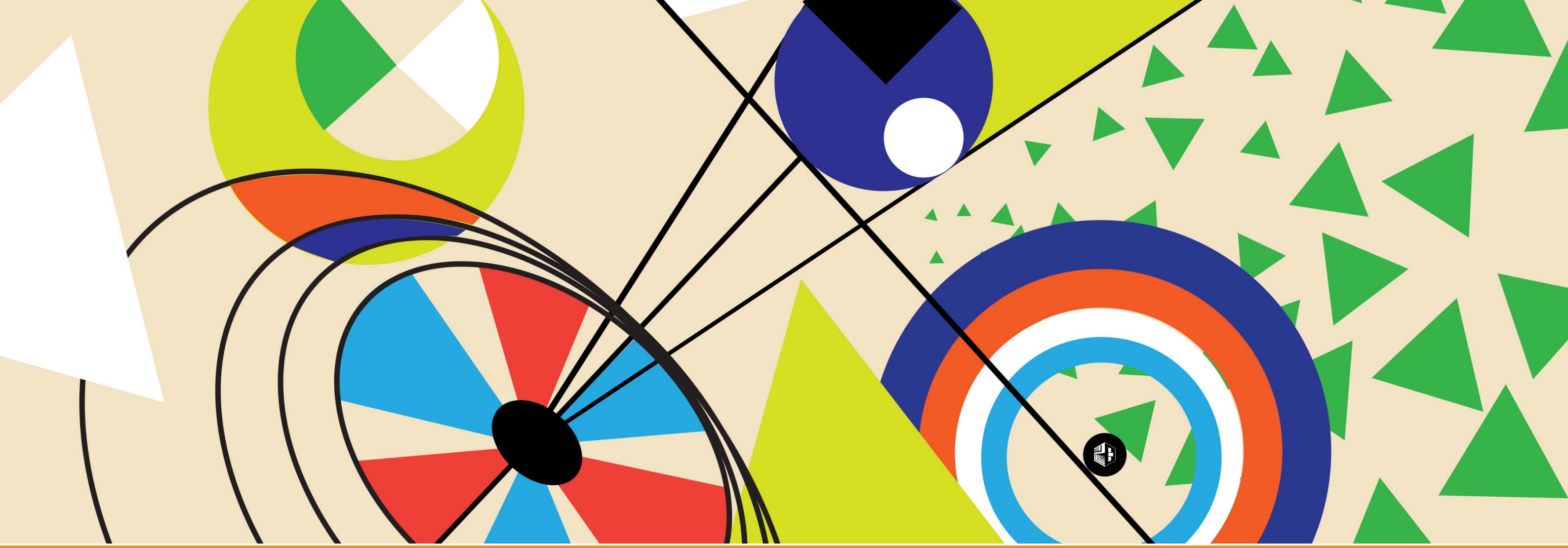


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2020

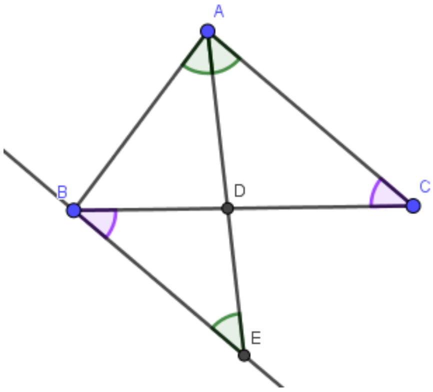
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE103320

U3. Introducción a la geometría moderna

Teorema 0.1. Teorema de la Bisectriz

La bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos que son proporcionales a los otros dos lados del triángulo. ♡

Demostración



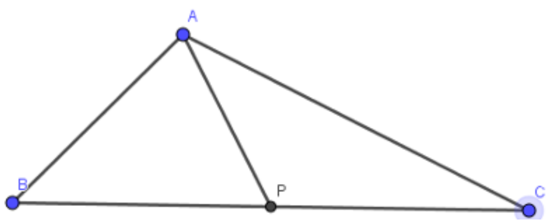
Sea ABC un triángulo. Trazamos su bisectriz AD del ángulo $\angle BAC$. Por demostrar que $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

Trazamos una recta l_1 paralela al segmento AC que pase por el vértice B y prolongamos AD a partir de D de manera que se corte con la paralela l_1 a AC en el punto E.
Veamos que el $\triangle ADC \approx \triangle EDB$ pues $\angle DAC = \angle DEB$ y $\angle ACD = \angle EBD$ ya que son ángulos alternos internos determinados por las transversales AE y BC respectivamente, cuyas paralelas son AC y l_1. El $\angle CDA = \angle BDE$ por ser opuestos por el vértice. Por lo tanto $\triangle ADC \approx \triangle EDB$ por el criterio AAA.
Entonces los lados de los triángulos semejantes son proporcionales, es decir $\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{AC} = \frac{DE}{AD}$ $\Longrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BE}{AC} \Longleftrightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{DC}{AC}$. Pero como el $\angle BAD = \angle DAC$ ya que son ángulos determinados por la bisectriz AD, y además $\angle DAC = \angle DEB$, entonces el triángulo BEA es isósceles por lo que $BE = AB$.
Por lo tanto $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.■

Problema:

Demuestre que, si P es el punto medio del segmento BC en un triángulo ABC y si $AB < CA$, entonces $\angle PAC < \angle BAP$. Sugerencia: Teorema de la Bisectriz.

Solución *(Por contradicción)*



Supongamos que $\angle PAC = \angle BAP$, entonces AP es bisectriz del $\angle BAC$, luego por el teorema anterior $\frac{BP}{AB} = \frac{PC}{AC}$, pero por hipótesis $BP = PC$, pues P es punto medio del segmento BC.

Entonces $\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC} \Longleftrightarrow 1 = \frac{AB}{AC}$. Por lo tanto $AB = AC$, lo cual es una contradicción ya que por hipótesis $AB < CA$.
Por otro lado, si $\angle PAC = \angle BAP$, entonces $BP > PC$, (proposición vista al principio del curso).
Lo anterior es una contradicción también ya que P es punto medio del segmento BC. ■