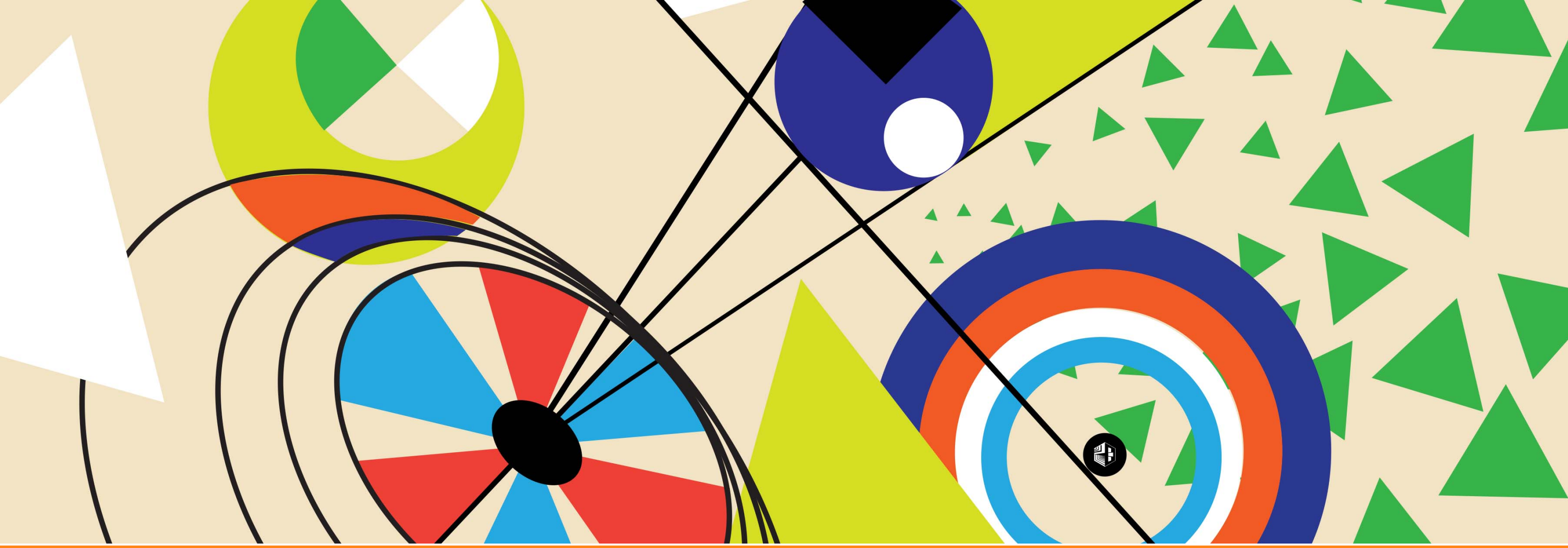


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2021

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

U4. Algunos teoremas importantes

Teorema de Menelao

Teorema 0.1

Si una recta interseca los tres lados BC, CA y AB del triángulo ABC en los puntos L, M y N respectivamente, entonces $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$.

Demostración

Sean el $\triangle ABC$ y l una recta que interseca a los lados BC, CA y AB del triángulo en los puntos L, M y N respectivamente.

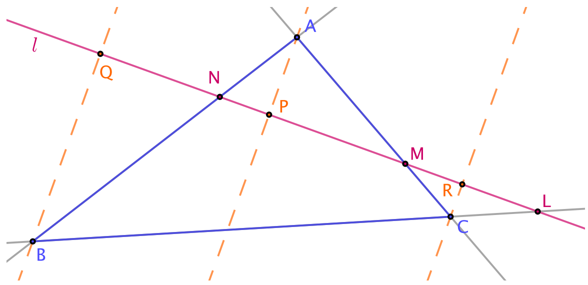
Consideremos AP, BQ y CR las perpendiculares por A, B y C respectivamente, a la línea l.

Entonces tenemos que:

$\triangle NPA \approx \triangle NQB$, luego $\frac{AN}{BN} = \frac{PA}{QB}$...(1)

$\triangle QBL \approx \triangle RCL$, luego $\frac{BL}{CL} = \frac{QB}{RC}$...(2)

$\triangle MCR \approx \triangle MAP$, luego $\frac{MC}{MA} = \frac{CR}{AP}$...(3)



Multiplicamos (1), (2) y (3) y obtenemos:

$$\frac{AN}{BN} \cdot \frac{BL}{CL} \cdot \frac{MC}{MA} = \frac{PA}{QB} \cdot \frac{QB}{RC} \cdot \frac{CR}{AP}$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{-NB} \cdot \frac{BL}{-LC} \cdot \frac{-CM}{MA} = \frac{-AP}{QB} \cdot \frac{QB}{-CR} \cdot \frac{CR}{AP} \Rightarrow (-1) \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

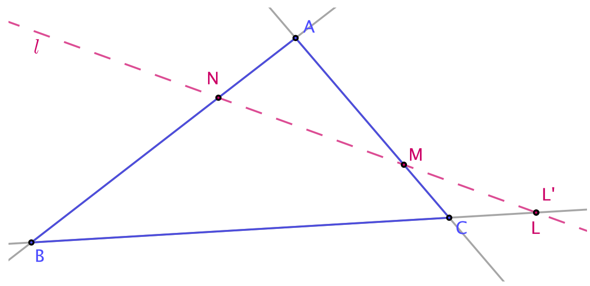
$\therefore \frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$ **QED**

Teorema 0.2

Si L, M y N son tres puntos en los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC, para los cuales se cumple $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$, *entonces los tres puntos son colineales.*

Demostración

Consideremos los puntos M y N en CA y AB respectivamente, prolonguemos la recta MN hasta que interseque a BC en un punto, al que llamaremos L'.



Por el teorema anterior se tiene que $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$ y por hipótesis también tenemos $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$, luego $\frac{BL'}{L'C} = \frac{BL}{LC}$, de donde $L' = L$.

Por lo tanto, L, M y N son colineales. **QED**

Teorema 0.3. Teorema de Menelao

Tres puntos L, M y N sobre los lados BC, CA y AB del triángulo $\triangle ABC$ son colineales si y sólo si $\dfrac{AN}{NB} \cdot \dfrac{BL}{LC} \cdot \dfrac{CM}{MA} = -1.$

Teorema 0.4. Forma Trigonométrica del Teorema de Ceva

Tres puntos L, M y N sobre los lados BC, CA y AB del triángulo $\triangle ABC$ son colineales si y sólo si $\dfrac{\operatorname{sen} ACN}{\operatorname{sen} NCB} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} BAL}{\operatorname{sen} LAC} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} CBM}{\operatorname{sen} MBA} = -1$

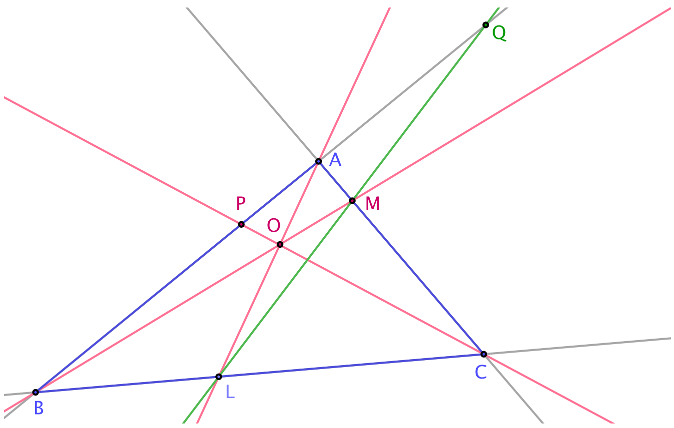
Demostración

La demostración se deja como actividad para el alumno.

Teorema 0.5. División interna y externa

Si P, L y M son puntos en los lados AB, BC y CA del triángulo ABC, tales que AL, BM y CP son concurrentes y si la recta LM interseca a AB en Q, entonces los puntos P y Q son conjugados armónicos con respecto al segmento AB.

Demostración



Como AL, BM y CP son concurrentes entonces por el teorema de Ceva $\dfrac{AP}{PB} \cdot \dfrac{BL}{LC} \cdot \dfrac{CM}{MA} = 1.$

Como L, M y Q son colineales, por el teorema de Menelao tenemos $\dfrac{AQ}{QB} \cdot \dfrac{BL}{LC} \cdot \dfrac{CM}{MA} = -1.$

De donde $\dfrac{AP}{PB} = -\dfrac{AQ}{QB}$. Por lo que P y Q son conjugados armónicos con respecto de AB.
Por lo tanto, P y Q dividen al segmento AB interna y externamente en la misma razón.

Ejercicios para ir pensando

1. Las seis bisectrices de los ángulos exteriores e interiores de un triángulo, pasan por tercias por cuatro puntos.
2. Las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo cortan los lados opuestos en tres puntos colineales.
3. Si P es el punto medio del lado BC del triángulo ABC, Q y R son puntos cualesquiera en AC y AB de tal forma que BQ y CR se corten en AP, entonces QR es paralelo a BC.