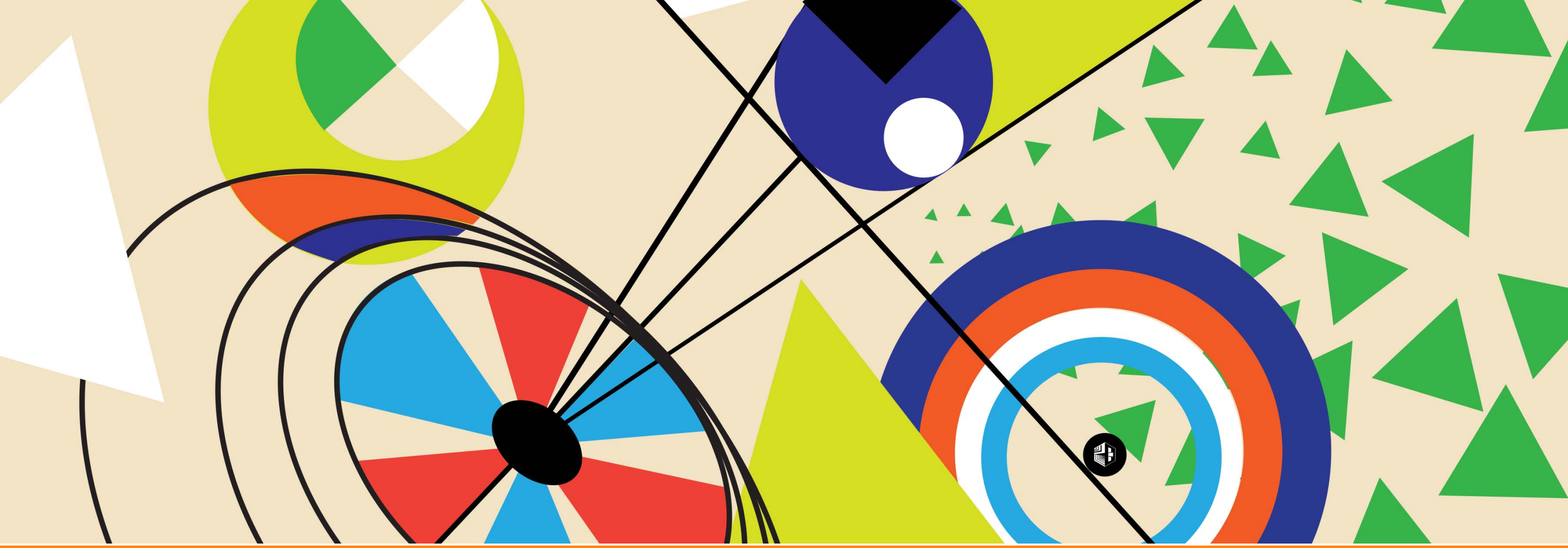


Geometría Moderna I

Material para el curso en línea

Autor: Tania Azucena Chicalote Jiménez & Jesús Ismael Garduño Maldonado

Instituto: Facultad de Ciencias

Fecha: 2021

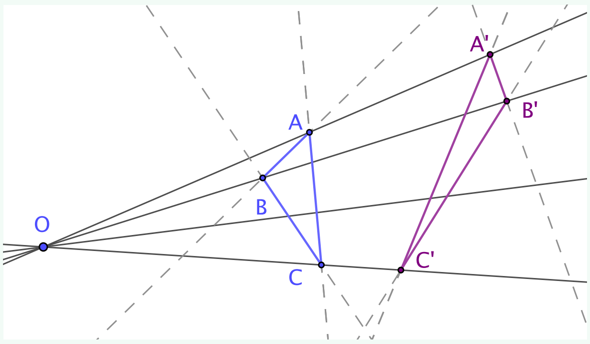
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE104721

U4. Algunos teoremas importantes

Teorema de Desargues

Definición 0.1. Figuras en perspectiva

Dos figuras están en perspectiva si todas las líneas que unen puntos correspondientes de las dos figuras son concurrentes. El punto en el cual concurren estas líneas es llamado el centro de perspectiva.



♣

Nota *Las figuras homotéticas están en perspectiva, pero no todas las figuras en perspectiva son homotéticas.*

Teorema 0.1

Si dos triángulos están en perspectiva, los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales; e inversamente, si los puntos de intersección de lados correspondientes de dos triángulos son colineales, los triángulos están en perspectiva.

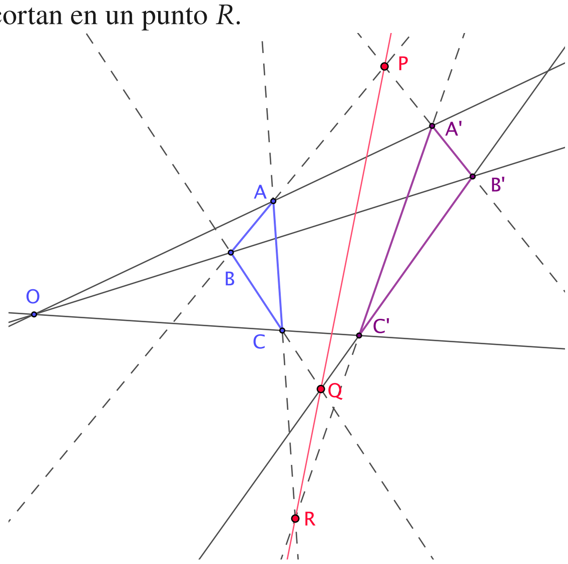
♡

Demostración

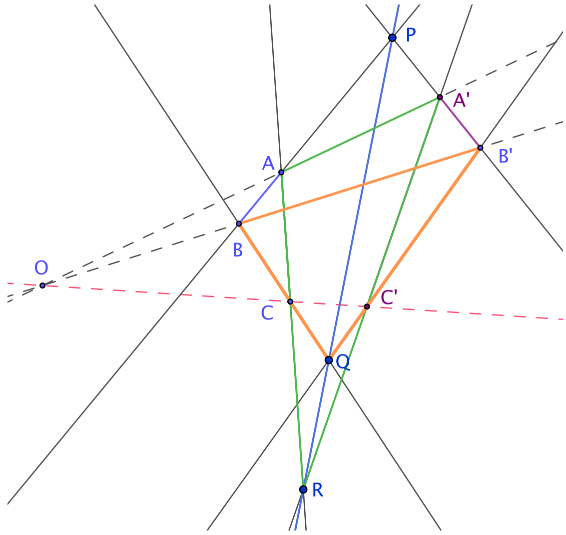
$\Rightarrow$] Sean los triángulos ABC y $A'B'C'$ en perspectiva, con O como centro de perspectiva.

Prolonguemos AB y $A'B'$ hasta que se corten en un punto P. De igual forma hacemos con BC y $B'C'$ que se cortan en un punto Q, y CA y $C'A'$ que se cortan en un punto R.

Ahora, consideremos el $\triangle ABO$ y la transversal $B'A'P$, luego, por el teorema de Menelao, $\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BB'}{B'O}\cdot\dfrac{OA'}{A'A}=-1$.
Consideremos también $\triangle BCO$ y la transversal $B'C'Q$, entonces $\dfrac{OB'}{B'B}\cdot\dfrac{CC'}{C'O}\cdot\dfrac{BQ}{QC}=-1$.
Consideremos también $\triangle CAO$ y la transversal $A'C'R$, entonces $\dfrac{AA'}{A'O}\cdot\dfrac{OC'}{C'C}\cdot\dfrac{CR}{RA}=-1$.
Multiplicamos las tres igualdades y obtenemos que $\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BQ}{QC}\cdot\dfrac{CR}{RA}=-1$. **QED**



$\Leftarrow$] Supongamos que P, Q y R, puntos de intersección de los lados correspondientes de los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, son colineales.



Tenemos que $\triangle AA'R$ y $\triangle BB'Q$ están en perspectiva con respecto de P. Además, consideremos que AA' y BB' se intersecan en un punto O. También tenemos que C es la intersección de AR y BQ, lados correspondientes de los triángulos en perspectiva $\triangle AA'R$ y $\triangle BB'Q$, y de igual forma C' es la intersección de $A'R$ y $B'Q$.

Luego, por la demostración anterior, tenemos que O, C y C' son colineales.

Por lo tanto, AA', BB' y CC' concurren en O.

QED

Nota *La línea en que están los puntos P, Q y R se llama eje de perspectiva de los triángulos ABC y $A'B'C'$.*

Ejercicios para ir pensando

1. Sea una circunferencia inscrita en $\triangle ABC$, tal que es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos L, M y N respectivamente. Si MN interseca a BC en el punto P, NL interseca a AC en el punto Q y ML interseca a AB en el punto R, entonces los puntos P, Q y R son colineales.
2. ¿Qué línea es el eje de perspectiva de triángulos homotéticos?
3. Verificar que, en la configuración del teorema de Desargues, hay diez líneas y diez puntos, tales que tres de ellos están en cada línea, y tres líneas pasan a través de cada punto. Mostrar que en esta figura hay diez pares de triángulos en perspectiva.