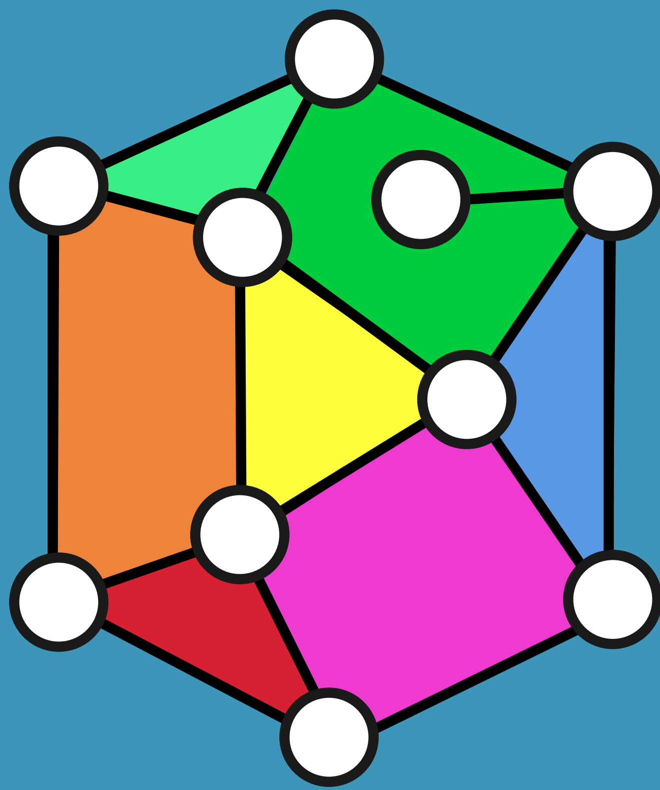


Notas de apoyo para Teoría de Gráficas I

Árboles

Axel Leonardo Castillo Vallejo

Bajo la supervisión de: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

2025

4. Árboles

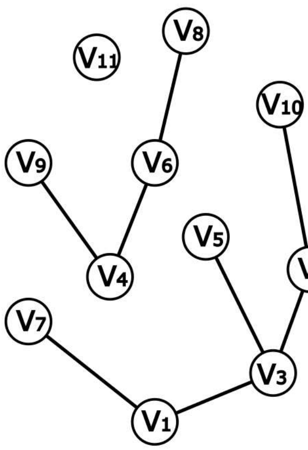
4.1. Definiciones

4.1.1. Árbol, bosque y hoja

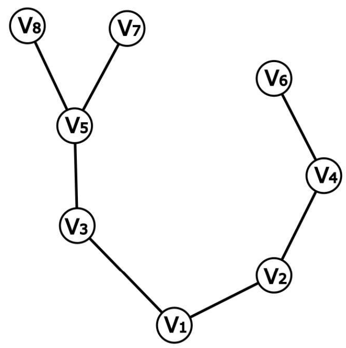
Sean G una gráfica:

1. Si G es una gráfica acíclica, diremos que G es un **bosque**.
2. Diremos que G es un **árbol** si es conexa y acíclica.

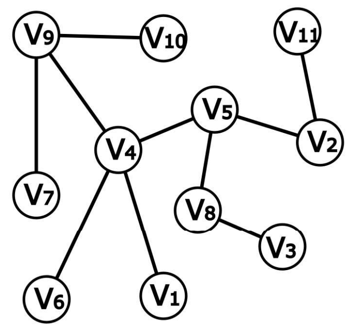
Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas:



G_a es un bosque.



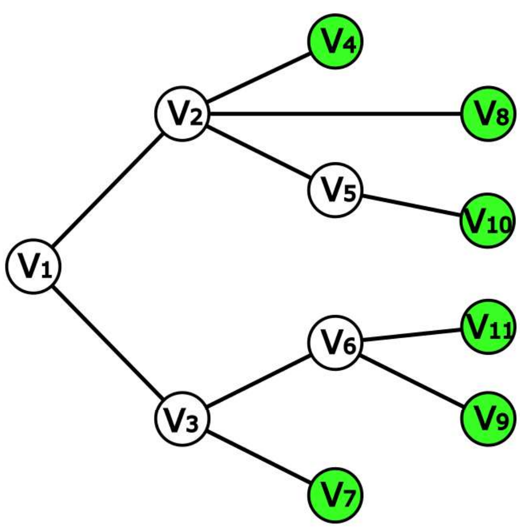
G_b es un árbol.



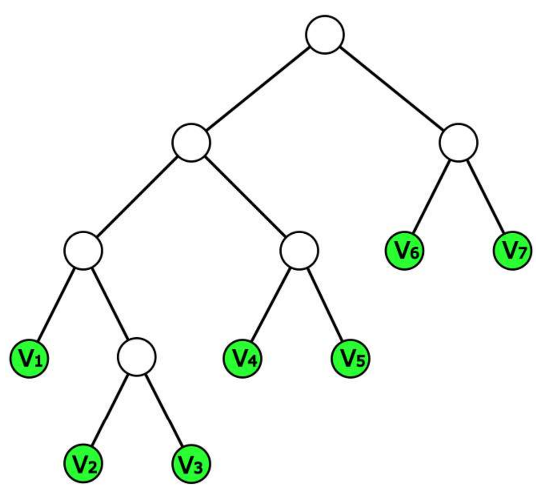
G_c es un árbol.

3. Si G es un bosque. Un vértice de G es una **hoja de** G si $\delta_G(x) = 1$.

Ejemplo. Consideremos los siguientes árboles, los vértices coloreados en verde son sus respectivas hojas:



G_a

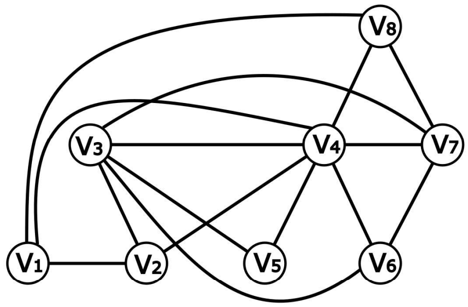


G_b

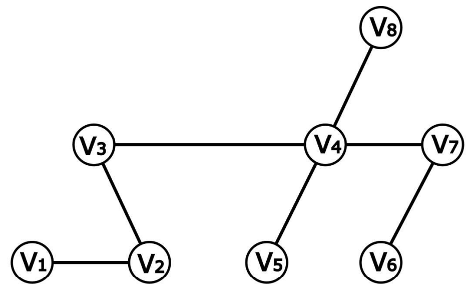
4.1.2. Árboles generadores

Sean G y H dos gráficas. Diremos que H **es un árbol generador de** G si H es un árbol y H es una subgráfica generadora de G.

Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas:



G_a



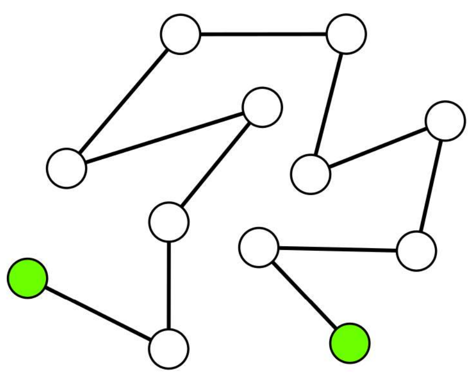
G_b

Observamos que G_b es un árbol, $G_b \leq G_a$ y $V(G_b) = V(G_a)$, por lo que diremos que G_b es un árbol generador de G_a.

4.2. Resultados importantes

1. **Teorema.** Sea G una gráfica. G es conexa si y sólo si G tiene un árbol generador.
2. **Lema.** Si G es un árbol no trivial, entonces G tiene al menos dos hojas.
3. **Lema.** Si G es una gráfica conexa no trivial, entonces G contiene dos vértices, digamos u y v, tales que $G - u$ y $G - v$ son conexas.
4. **Corolario.** Si G es un árbol y x es una hoja de G, entonces $G - x$ es un árbol.

Ejemplo. Consideremos el siguiente árbol:



Observamos que se cumplen los resultados:

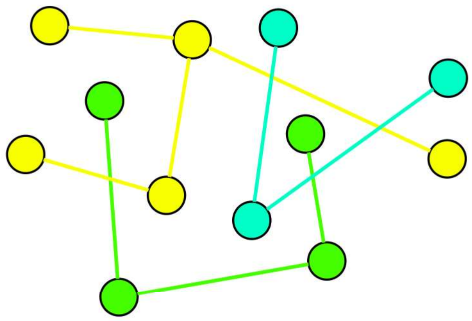
Teorema 1. Como la gráfica es conexa (por ser un árbol), tiene un árbol generador, la misma gráfica.

Lema 2. Los vértices en verde son dos hojas para el árbol

Lema 3 y Corolario 4. Claramente si quitamos los vértices en verde (hojas), la gráfica resultante es aún conexa (árbol).

5. **Corolario.** Si G es un bosque con k componentes conexas, entonces $|E(G)| = |V(G)| - k$.

Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica con las componentes conexas H_1, H_2 y H_3 que son pares de conjuntos de vértices y aristas coloreadas de verde, amarillo y azul, respectivamente:



Observamos que se cumple el corolario 4:

$$|E(G)| = 9 = 12 - 3 = |V(G)| - k$$

6. **Corolario.** Si G es una gráfica conexa, entonces $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.

7. **Teorema.** G es un árbol si y sólo si para cualquier par de vértices de G, digamos u y v, existe una única $uv - trayectoria$ en G.

8. **Proposición.** Sea G una gráfica y $\{u, v\} \subseteq V(G)$. Si T_1 y T_2 son dos $uv - trayectorias$ distintas, entonces G contiene un cíclo.

9. **Teorema de (Caracterización de árboles).** Sea G una gráfica. Los siguientes son equivalentes:

   a) G es un árbol
   b) G es conexa y $|E(G)| = |V(G)| - 1$
   c) G es acíclica y $|E(G)| = |V(G)| - 1$

10. **Corolario.** Si G es una gráfica conexa y $|E(G)| > |V(G)| - 1$, entonces G tiene al menos un ciclo.

4.3. Ejercicios

1. Sea G una gráfica conexa donde $\delta(G) \geq 2$. Demuestra que G contiene un ciclo.

2. Sea G un árbol y $v \in V(G)$. Demuestra que v es un vértice de corte [ver definición de vértice de corte en ejercicio 3.3.9.] si y sólo si $\delta(v) \geq 2$.

3. Sea G una gráfica conexa. Demuestra que G en un árbol si y sólo si toda arista es un puente [ver definición de un puente en ejercicio 3.3.9.].

4. Sea G un árbol. Demuestra que eliminando sucesivamente cada hoja llegamos siempre a la gráfica singleton.

5. Sea G un árbol y v un vértice de grado k. Demuestra que G tiene al menos k hojas.

6. Sea T un árbol generador de una gráfica conexa G, y sea e una arista en G que no está en T. Demuestra que $T + e$ contiene un único ciclo.

7. Demuestra que todo árbol es una gráfica bipartita.

8. Demuestra que todo árbol tiene un centro que consiste de uno o dos vértices adyacentes.

9. Sea G una gráfica conexa y $e \in E(G)$. Demuestra que e está en cada árbol generador de G si y sólo si e es un puente de G [ver definición de un puente en ejercicio 3.3.9.].

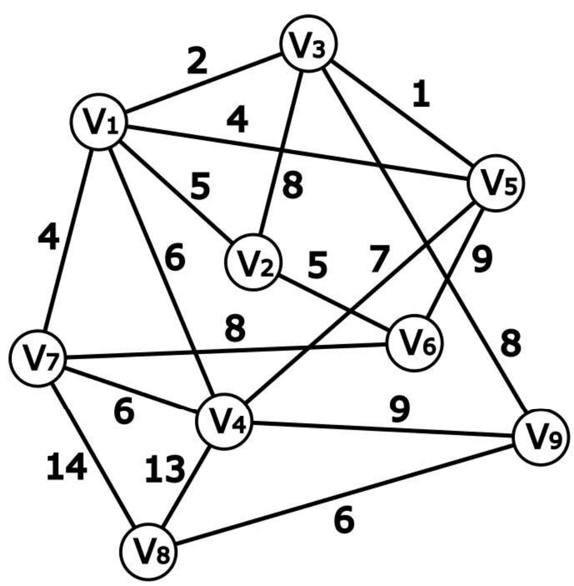
10. Demuestra que el complemento de un árbol no trivial es (es decir, con al menos dos vértices), o conexo, o consta de un vértice aislado y una subgráfica completa.

4.4. Algoritmo de Kruskal

El algoritmo de Kruskal sirve para generar un árbol generador de peso mínimo. Requerimos una gráfica conexa G, una función de peso en las aristas, digamos $w : E(G) \to \mathbb{R}^+$ y una lista de aristas en G, digamos L, tal que este ordenada por peso de manera ascendente:

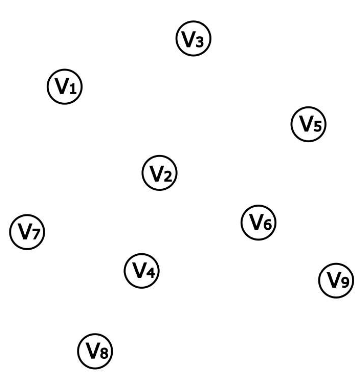
1. Iniciamos con una gráfica vacía, digamos H, tal que $V(H) = V(G)$.
2. Sea α la primera arista en L, entonces:
   a) Si $H + \alpha$ es acíclica, entonces descartamos α de L y hacemos $H = H + \alpha$.
   b) Si $H + \alpha$ tiene un ciclo, entonces solo descartamos α de L.
3. Repetimos el paso 2 hasta que $|E(H)| = |V(H)| - 1$.

Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica conexa con peso en sus aristas y apliquemos el algoritmo de Kruskal.

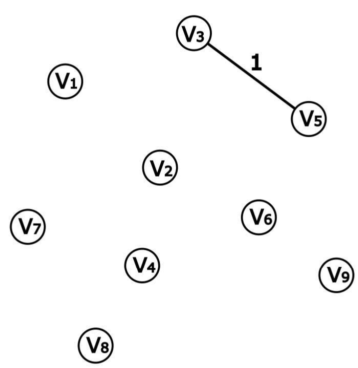


G

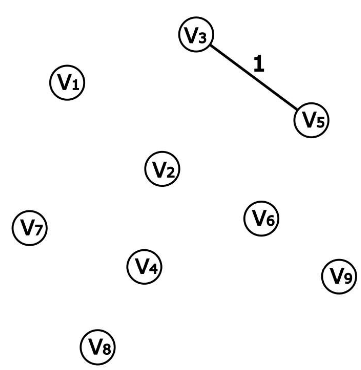
$L = [v_3v_5, v_1v_3, v_1v_5, v_1v_7, v_1v_2, v_2v_6, v_8v_9, v_1v_4, v_7v_4, v_4v_5, v_7v_6, v_3v_9, v_2v_3, v_5v_6, v_4v_9, v_4v_8, v_7v_8]$



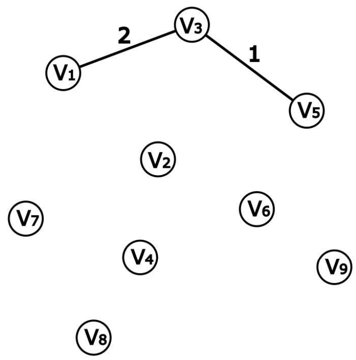
P1 : H tal que $V(H) = V(G)$ y $E(H) = \emptyset$



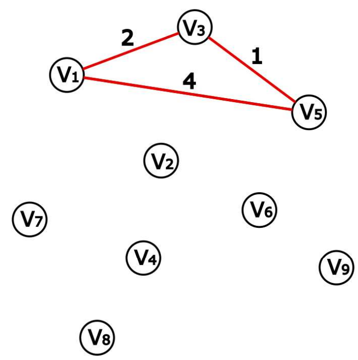
P2: $H + v_3v_5$ es acíclica, entonces $L = [v_1v_3, v_1v_5, \ldots, v_7v_8]$ y $H = H + v_3v_5$



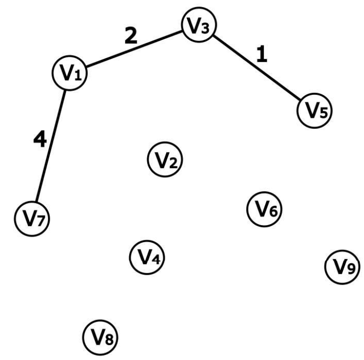
P3: Como $|E(H)| = 1 \neq 8 = |V(H)| - 1$, repetimos el paso 2.



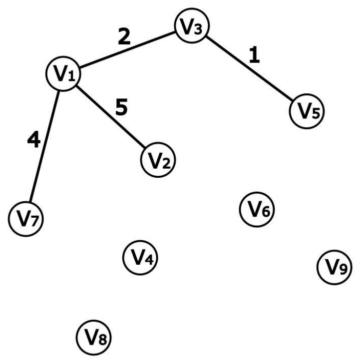
P2: $H + v_1v_3$ es acíclica, entonces
$L = [v_1v_5, v_1v_7, \ldots, v_7v_8]$ y
$H = H + v_1v_3$
P3: $2 \neq 8$ y repetimos P2.



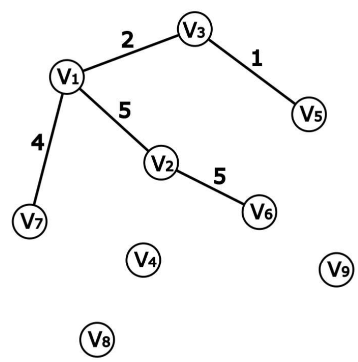
P2: $H + v_1v_5$ tiene el ciclo $(v_1v_{3,3}\,v_5, v_5v_1)$, entonces
$L = [v_1v_7, v_1v_2, \ldots, v_7v_8]$
P3: $2 \neq 8$ y repetimos P2.



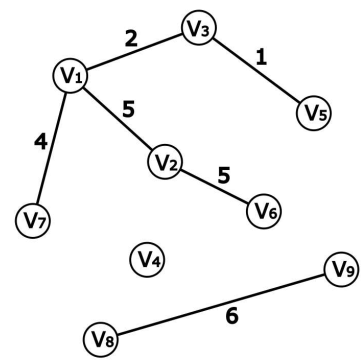
P2: $H + v_1v_7$ es acíclica, entonces
$L = [v_1v_2, v_2v_6, \ldots, v_7v_8]$ y
$H = H + v_1v_7$
P3: $3 \neq 8$ y repetimos P2.



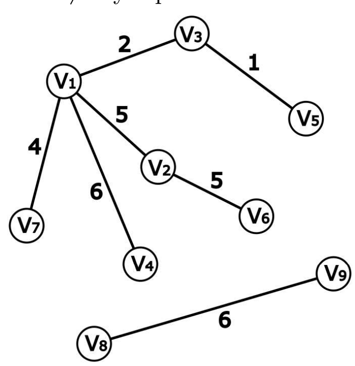
P2: $H + v_1v_2$ es acíclica, entonces
$L = [v_2v_6, v_8v_9, \ldots, v_7v_8]$ y
$H = H + v_1v_2$
P3: $4 \neq 8$ y repetimos P2.



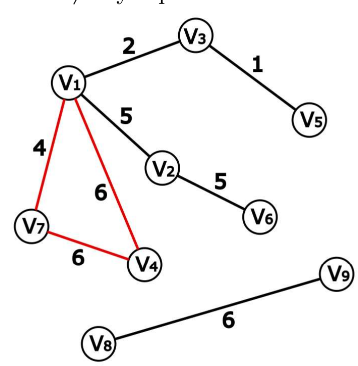
P2: $H + v_2v_6$ es acíclica, entonces
$L = [v_8v_9, v_1v_4, \ldots, v_7v_8]$ y
$H = H + v_2v_6$
P3: $5 \neq 8$ y repetimos P2.



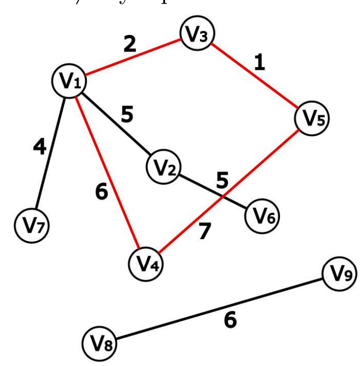
P2: $H + v_8v_9$ es acíclica, entonces
$L = [v_1v_4, v_7v_4, \ldots, v_7v_8]$ y
$H = H + v_8v_9$
P3: $6 \neq 8$ y repetimos P2.



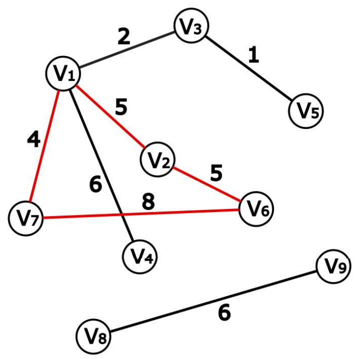
P2: $H + v_1v_4$ es acíclica, entonces
$L = [v_7v_4, v_4v_5, \ldots, v_7v_8]$ y
$H = H + v_1v_4$
P3: $7 \neq 8$ y repetimos P2.



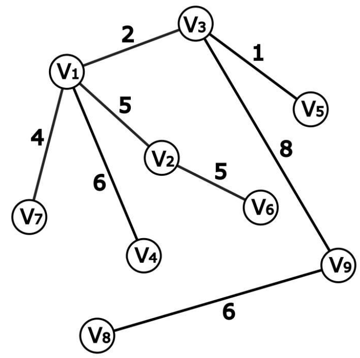
P2: $H + v_7v_4$ tiene el ciclo $(v_1v_{4,4}\,v_7, v_7v_1)$, entonces
$L = [v_4v_5, v_7v_6, \ldots, v_7v_8]$
P3: $7 \neq 8$ y repetimos P2.



P2: $H + v_4v_5$ tiene el ciclo $(v_1v_3, v_3v_5, v_5v_4, v_4v_1)$, entonces
$L = [v_7v_6, v_3v_9, \ldots, v_7v_8]$
P3: $7 \neq 8$ y repetimos P2.



P2: $H + v_4v_5$ tiene el ciclo $(v_1v_2, v_2v_6, v_6v_7.v_7v_1)$, entonces $L = [v_3v_9, v_2v_3, \ldots, v_7v_8]$
P3: $7 \neq 8$ y repetimos P2.



P2: $H + v_3v_9$ es acíclica, entonces $L = [v_2v_3, v_5v_6, \ldots, v_7v_8]$ y $H = H + v_3v_9$
P3: Como $|E(H)| = 8 = |V(H)| - 1$, entonces hemos concluido el algoritmo.