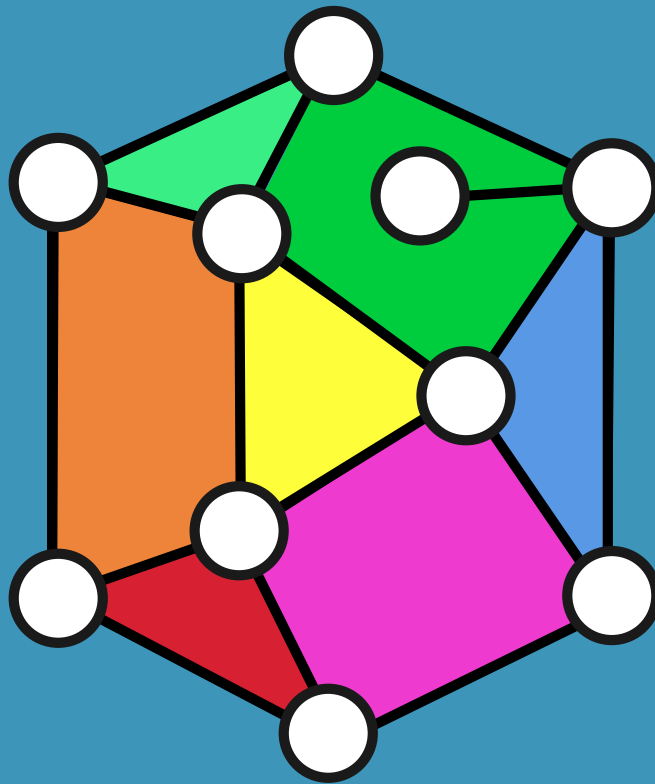




NOTAS DE APOYO PARA TEORÍA DE GRÁFICAS I

Apareamientos y coloración por aristas

Axel Leonardo Castillo Vallejo
Bajo la supervisión de: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

6. Apareamientos en gráficas y coloración por aristas

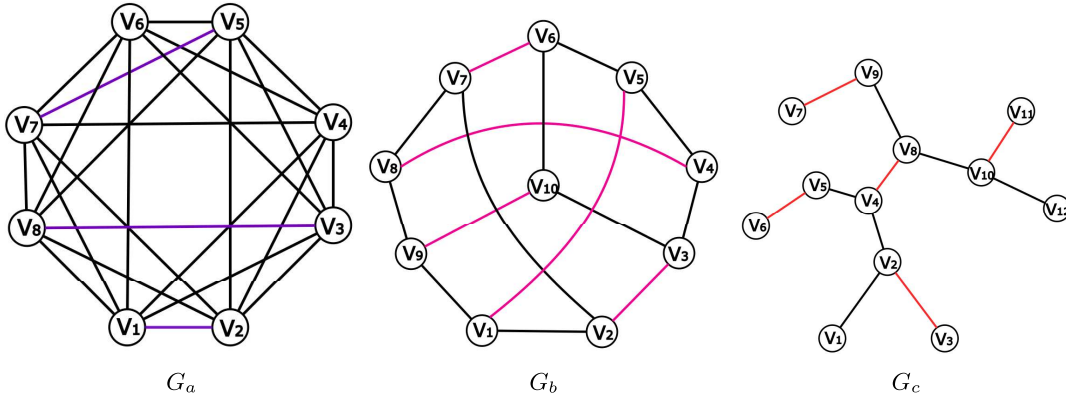
6.1. Definiciones

6.1.1. Apareamiento, apareado y saturado

Sean G una gráfica y $M \subseteq E(G)$:

1. Diremos que M es un **apareamiento** de G si cualesquiera dos aristas distintas de M , no comparten extremos.
2. Si M es un apareamiento de G , $uv = e \in M$, i.e. u y v son extremos de la arista e , entonces diremos que u y v **están** M -*apareados*.
3. Sea M es un apareamiento de G y $x \in V(G)$. Diremos que x **es** M -*saturado* si x es un vértice extremo de alguna arista de M . Si es necesario especificar la arista de la que es extremo x , digamos e , entonces diremos que x **es** M -*saturado por* e .

Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas y conjuntos de aristas:



- (a) $M_a = (v_1v_2, v_8v_3, v_7v_5) \subseteq E(G_a)$ y cumple que cualesquiera dos aristas distintas no comparten extremos, por lo tanto M_a es un apareamiento de G_a .

Como $v_1v_2 \in M_a$, entonces decimos que v_1 y v_2 están M_a -apareados. De igual modo v_8 y v_3 están M_a -apareados, y v_7 y v_5 están M_a -apareados.

Además diremos que v_1, v_2, v_8, v_3, v_7 y v_5 son M_a -saturados.

- (b) $M_b = (v_1v_5, v_2v_3, v_9v_{10}, v_6v_7, v_4v_8) \subseteq E(G_b)$ y cumple que cualesquiera dos aristas distintas no comparten extremos, por lo tanto M_b es un apareamiento de G_b .

Como $v_1v_5 \in M_b$, entonces decimos que v_1 y v_5 están M_b -apareados. De igual modo v_2 y v_3 están M_b -apareados, v_9 y v_{10} están M_b -apareados, v_6 y v_7 están M_b -apareados, y v_4 y v_8 están M_b -apareados.

Además diremos que todos los vértices en $V(G_b)$ son M_b -saturados.

- (c) $M_c = (v_2v_3, v_5v_6, v_7v_9, v_4v_8, v_{10}v_{11}) \subseteq E(G_c)$ y cumple que cualesquiera dos aristas distintas no comparten extremos, por lo tanto M_c es un apareamiento de G_c .

Como $v_2v_3 \in M_c$, entonces decimos que v_2 y v_3 están M_c -apareados. De igual modo v_5 y v_6 están M_c -apareados, v_7 y v_9 están M_c -apareados, v_4 y v_8 están M_c -apareados, y v_{10} y v_{11} están M_c -apareados.

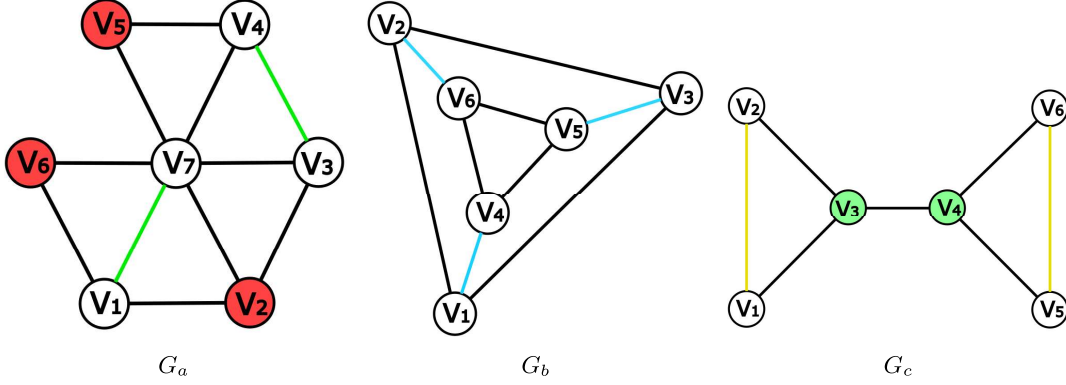
Además diremos que $v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_9, v_4, v_8, v_{10}$ y v_{11} son M_c -saturados.

6.1.2. Apareamiento: Maximal, Máximo y Perfecto

Sean G una gráfica y $M \subseteq E(G)$ un apareamiento de G .

1. Decimos que M es un **apareamiento maximal** si para cada apareamiento N de G tal que $M \subseteq N$, se satisface que $M = N$.

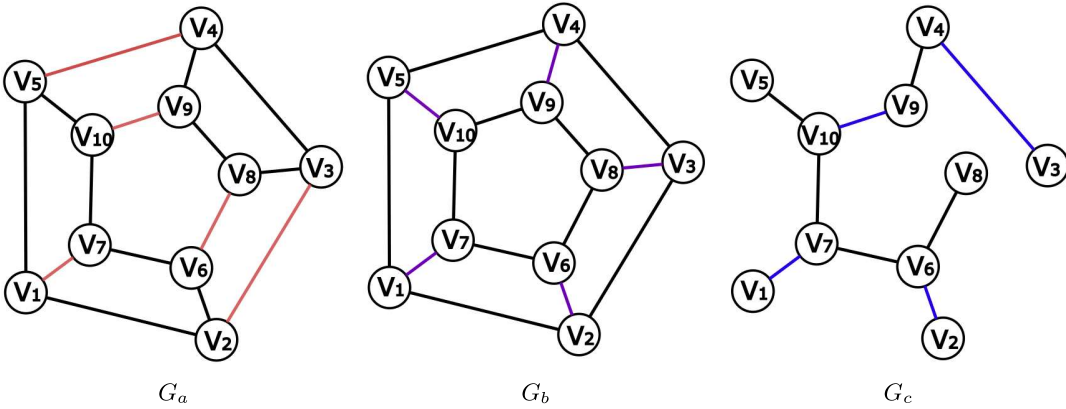
Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas y apareamientos:



- (a) $M_a = (v_1v_7, v_3v_4)$, es evidente que para cualquier otro apareamiento, digamos N_a , tal que $M_a \subseteq N_a$ debe suceder que $M_a = N_a$, debido a que todos los vértices en G_a que no están M_a -saturados (v_6, v_5 saturados y v_2) tienen a todos ssaturados vecinos M_a -saturados, es decir no es posible agregar una arista más a M_a de tal forma que siga siendo un apareamiento. Por lo tanto M_a es un apareamiento maximal.
- (b) $M_b = (v_1v_4, v_2v_6, v_3v_5)$, claramente M_a es maximal, debido a que satura a todos los vértices de la gráfica G_b .
- (c) $M_c = (v_1v_2, v_5v_6)$, no es un apareamiento maximal, ya que podemos considerar el apareamiento $N_c = (v_1v_2, v_5v_6, v_3v_4) \supseteq M_c$, es decir, es posible “hacer más grande” el apareamiento M_c .

2. Decimos que M es un **apareamiento máximo** si para cada apareamiento N de G se tiene que $|N| \leq |M|$.

Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas y apareamientos:

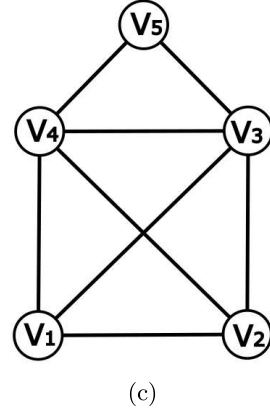
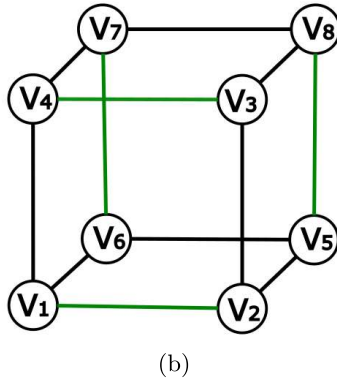
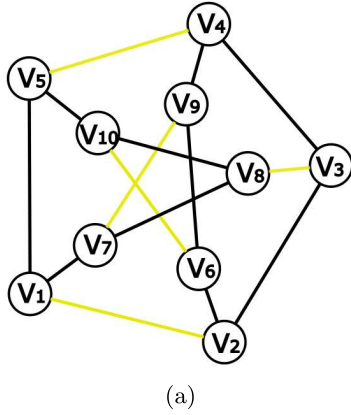


- (a) $M_a = (v_1v_7, v_2v_3, v_4v_5, v_6v_8, v_9v_{10})$, es evidente que cualquier otro apareamiento de G_a , digamos N_a , cumple que $|N_a| \leq |M_a|$, debido a que todos los vértices en G_a están M_a -saturados, por lo que no es posible agregar otra arista sin que esta no comparta extremos con alguna arista de M_a . Por lo tanto M_a es un apareamiento máximo.

- (b) $M_b = (v_1v_7, v_2v_6, v_3v_8, v_4v_9, v_5v_{10})$, siguiendo el mismo razonamiento que en (a), M_b es un apareamiento máximo. Además, observamos que la $G_a = G_b$, por lo que hemos encontrado dos apareamientos máximos distintos para la misma gráfica, y entonces un apareamiento máximo no es estrictamente único.
- (c) $M_c = (v_1v_7, v_2v_6, v_3v_4, v_9v_{10})$, podemos verificar que no existe un apareamiento tal que su cardinalidad sea mayor que $4 = |M_c|$ para la gráfica G_c . Por lo tanto M_3 es un apareamiento máximo.

3. Diremos que M es un **apareamiento perfecto** si todo vértice de G es M – saturado.

Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas y apareamientos:



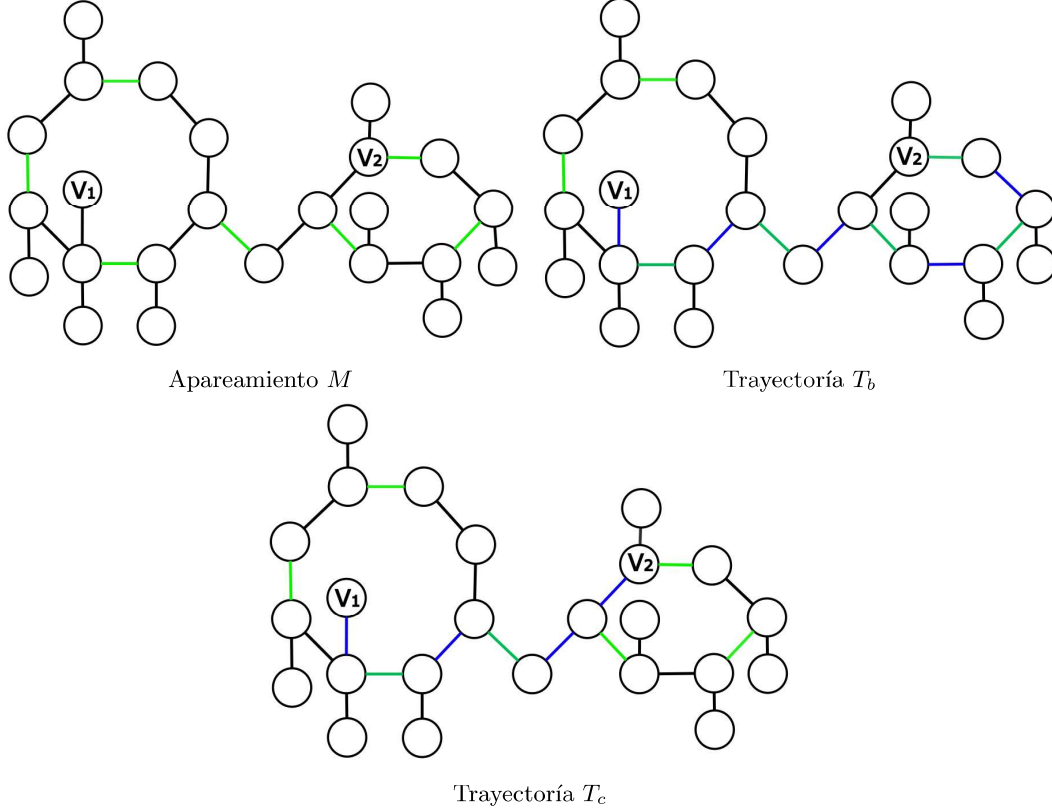
- (a) $M_a = (v_1v_2, v_3v_8, v_4v_5, v_7v_9, v_6v_{10})$, como todos los vértices de G_a están M_a – saturados, M_a es un apareamiento perfecto.
- (b) $M_b = (v_1v_2, v_3v_4, v_6v_7, v_5v_8)$, como todos los vértices de G_b están M_b – saturados, M_b es un apareamiento perfecto.
- (c) Es evidente que una gráfica con una cantidad impar de vértices no puede tener un apareamiento perfecto, por lo que no existe un apareamiento perfecto para G_c .

6.1.3. M-alternante y M-aumentante

Sean G una gráfica y M un apareamiento de G .

1. Una trayectoria $T = (x_0, \dots, x_n)$ es **M-alternante** si y sólo si T alterna aristas de M y de $E(G) \setminus M$, i.e. $\forall i \in \{0, \dots, n-2\} (x_i x_{i+1} \in M \iff x_{i+1} x_{i+2} \notin M)$.

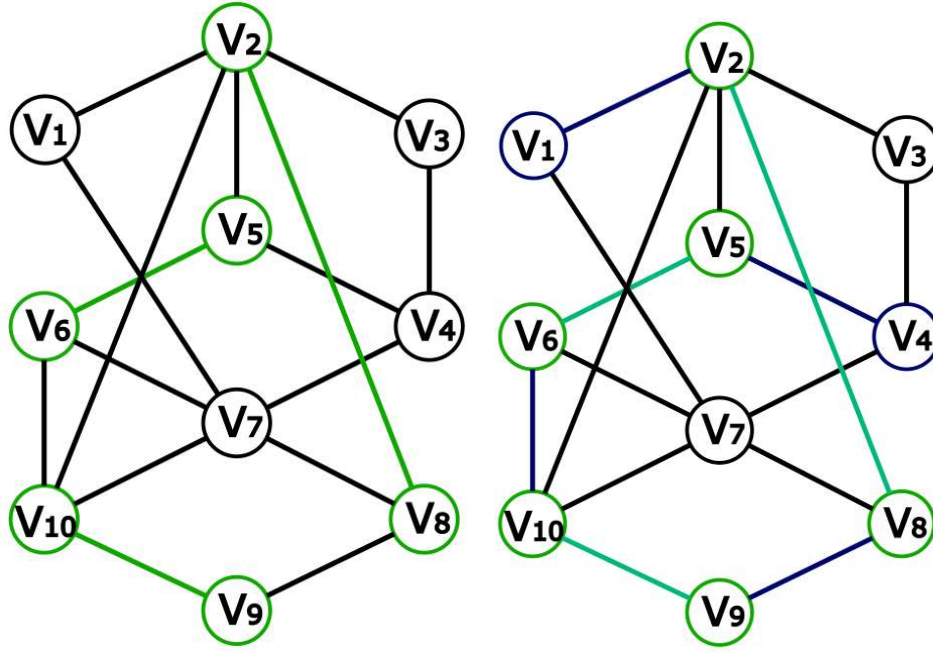
Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica G :



- (a) El apareamiento M son las aristas coloreadas de verde.
- (b) Sea T_b la $v_1 v_2$ -trayectoria formada por las aristas coloreadas de azul fuerte (estas pertenecen a $E(G) \setminus M$) y las aristas coloreadas de cian (estas pertenecen a M). Como T_b alterna aristas de M y $E(G) \setminus M$, T_b es una trayectoria M -alternante.
- (c) Sea T_c la $v_1 v_2$ -trayectoria formada por las aristas coloreadas de azul fuerte (estas pertenecen a $E(G) \setminus M$) y coloreada las aristas coloreadas de cian (estas pertenecen a M). Como dos aristas consecutivas de T_c pertenecen a $E(G) \setminus M$, T_c no es una trayectoria M -alternante.

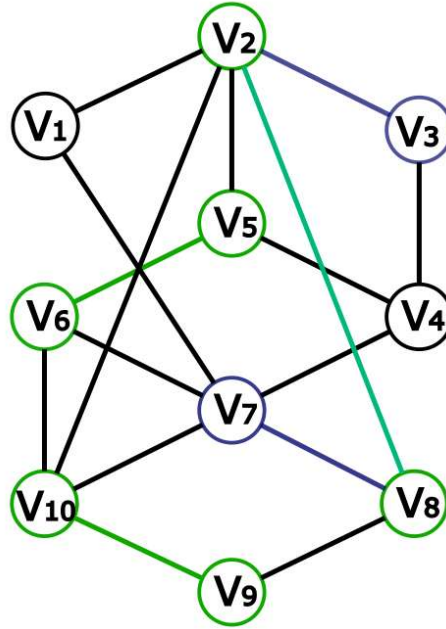
2. Una trayectoria en G es M -**augmentante** si es M -alternante y además sus vértices inicial y final no son M -saturados.

Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica G :



Apareamiento M

Trayectoria T_b



Trayectoria T_c

- (a) El apareamiento M son las aristas coloreadas de verde y los vértices M -saturados también están coloreados de verde.
- (b) Sea T_b la v_1v_4 -trayectoria formada por las aristas coloreadas de azul fuerte (estas pertenecen a $E(G) \setminus M$) y las aristas coloreadas de cian (estas pertenecen a M). Como T_b alterna aristas de M y $E(G) \setminus M$, T_b es una trayectoria M -alternante. Además los vértices inicial y final de T_b no son M -saturados. Por lo tanto, T_b es una trayectoria M -augmentante.

- (c) Sea T_c la v_3v_7 -trayectoria formada por las aristas coloreadas de azul fuerte (estas pertenecen a $E(G) \setminus M$) y las aristas coloreadas de cian (estas pertenecen a M). Como T_c alterna aristas de M y $E(G) \setminus M$, T_c es una trayectoria M -alternante. Además los vértices inicial y final de T_c no son M -saturados. Por lo tanto T_c es una trayectoria M -aumentante.

Observación. Si M es un apareamiento de G y T es una trayectoria M -alternante, entonces todo vértice interno de T es M -saturado por una arista en $E(T) \cap M$.

6.1.4. Diferencia simétrica

Sean A y B dos conjunto. La **diferencia simétrica de A y B** denotada por $A \Delta B$, se define como $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Notamos que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

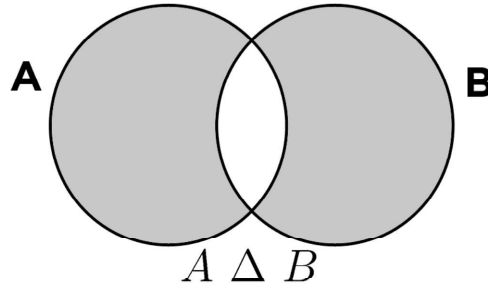
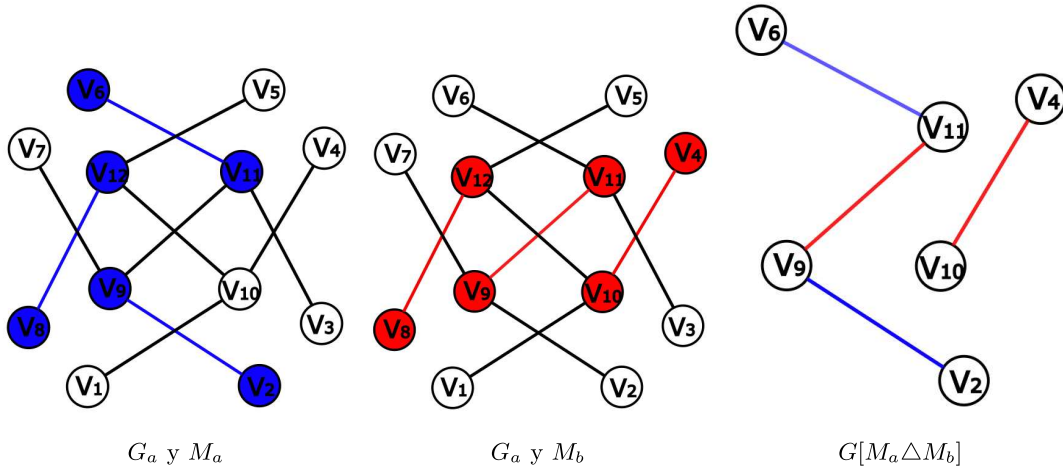


Diagrama de Venn para la diferencia simétrica

Sean G una gráfica, M y N dos apareamientos distintos de G . La gráfica $G[M \Delta N]$ es la gráfica inducida por el conjunto de aristas $M \Delta N$ en G .

Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas y apareamientos:



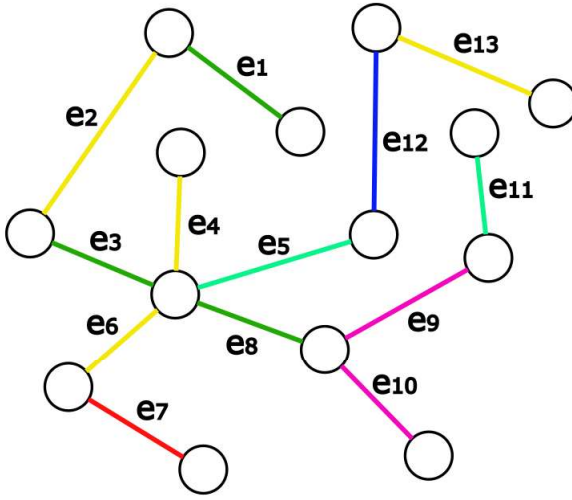
Observación. Si G un gráfica, M y M' dos apareamientos distintos de G . Toda trayectoria en $G[M \Delta M']$ es una trayectoria M -alternante y M' -alternante en G .

6.1.5. Coloración por aristas

1. Dada una gráfica G y un conjunto $K' \neq \emptyset$, una **coloración por aristas en G** es una función $C' : E(G) \rightarrow K'$,
2. a los elementos del conjunto K' les llamaremos los **colores de C'** ,
3. si $|K'| = m$, podemos hacer referencia a C' como una **m -coloración por aristas en G**
4. y decimos que G es **m -coloreable por aristas**.
5. Si $k \in K'$, la **clase cromática de k en G** , es el conjunto

$$\eta'(k) = \{e \in E(G) : C'(e) = k\}$$

Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica G y el conjunto $K' = \{\text{amarillo}, \text{verde}, \text{aqua}, \text{azul}, \text{rojo}\}$:



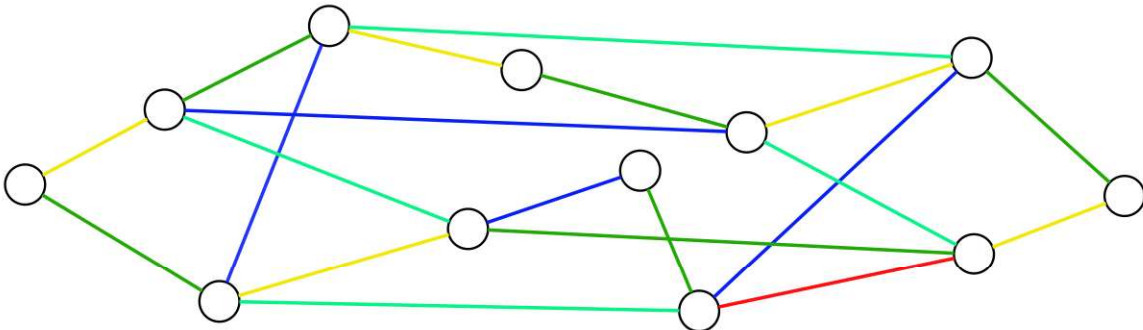
- a) La función $C' : E(G) \rightarrow K$ dada por $C'[\{e_2, e_4, e_6, e_{13}\}] = \text{amarillo}$, $C'[\{e_1, e_3, e_8\}] = \text{verde}$, $C'[\{e_5, e_{11}\}] = \text{aqua}$, $C'(e_{12}) = \text{azul}$ y $C'(e_7) = \text{rojo}$. Es una coloración de G .
- (b) Los colores de C son: *amarillo, verde, aqua, azul y rojo*.
- (c) Como $|K'| = 5$, decimos que C' es una 5-coloración por aristas de G .
- (d) G es 5-coloreable por aristas.
- (e) $\eta'(\text{amarillo}) = \{e_2, e_4, e_6, e_{13}\}$
 $\eta'(\text{verde}) = \{e_1, e_3, e_8\}$
 $\eta'(\text{aqua}) = \{e_5, e_{11}\}$
 $\eta'(\text{azul}) = \{e_{12}\}$
 $\eta'(\text{rojo}) = \{e_7\}$

6.1.6. Índice cromático

Sea G un gráfica y C' una coloración por aristas de G :

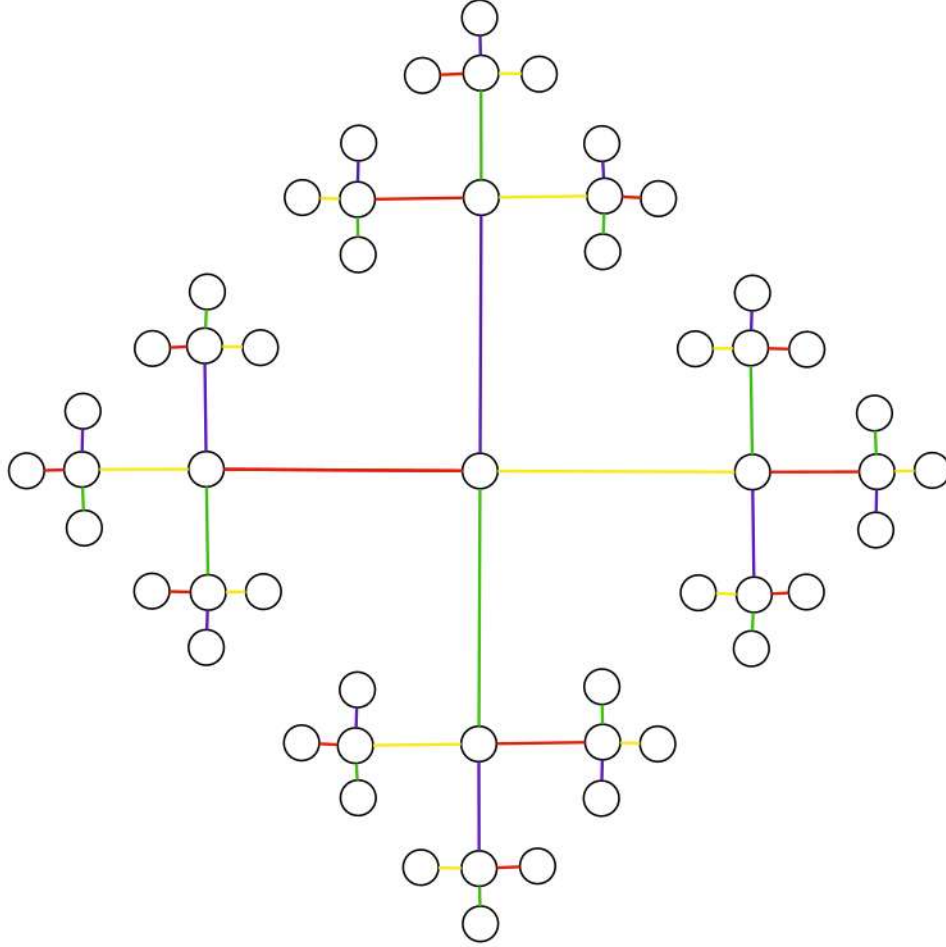
1. Si $\forall e_1, e_2 \in E(G)$ tales que e_1 y e_2 comparten un extremo, se cumple que $C'(e_1) \neq C'(e_2)$, diremos que C' es una **coloración por aristas propia en G** .

Ejemplo. La siguiente gráfica tiene una coloración por aristas propia:



2. El **índice cromático de G** , es: $\chi'(G) := \min\{k \in \mathbb{N} : G \text{ tiene una } k\text{-coloración por aristas propia}\}$
Es decir, es el menor número de colores necesarios para tener una coloración por aristas propia en G .
3. Si C' es una coloración por aristas propia en G con $\chi'(G)$ colores, diremos que C' es una **χ' -coloración de G** .

Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica G . Podemos verificar que $\chi'(G) = 4$, por lo que la siguiente coloración por aristas es una χ' -coloración de G :



6.2. Resultados importantes

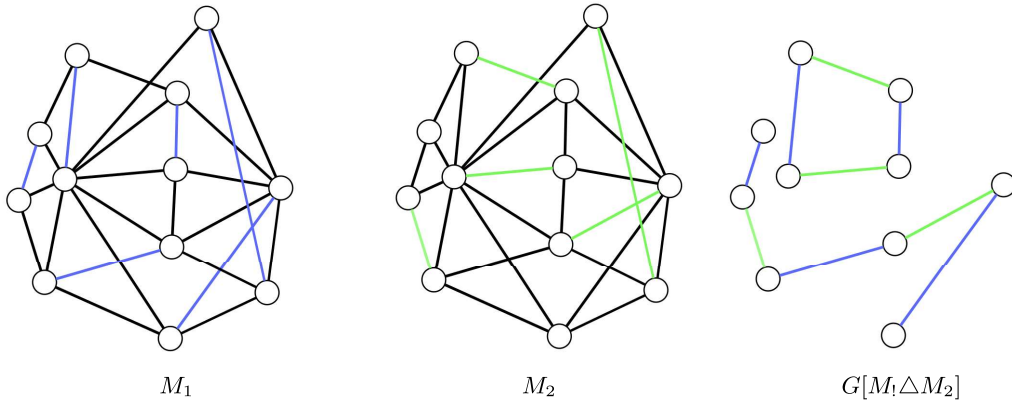
1. **Lema.** Si G es una gráfica, todo apareamiento perfecto es apareamiento máximo y todo apareamiento máximo es apareamiento maximal.
2. **Lema.** Sean G un gráfica y M un apareamiento de G . Si T es una trayectoria M -aumentante, entonces T tiene longitud impar. Bajo estas suposiciones, si T tiene longitud n , entonces

$$|E(T) \cap M| = \frac{(n-1)}{2}$$

3. **Lema.** Sean G una gráfica, M un apareamiento de G y P una trayectoria M -aumentante. Si $M' = M \triangle E(P)$, entonces M' es un apareamiento de G y además $|M'| = |M| + 1$
4. **Teorema de Berge.** Sean G una gráfica y M un apareamiento de G . M es máximo si y sólo si G no tiene trayectorias M -aumentantes.

5. **Lema.** Si G es una gráfica, M y M' dos apareamientos distintos de G , entonces toda componente conexa de $G[M \triangle M']$ es un ciclo de longitud par o una trayectoria.

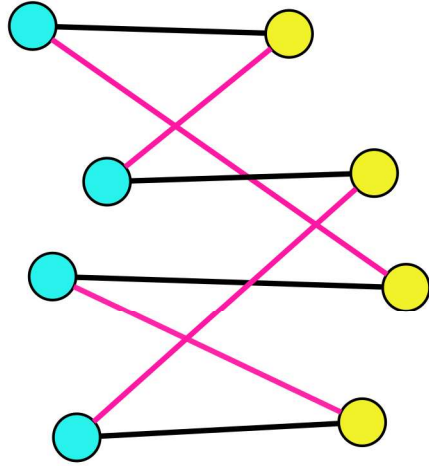
Ejemplo. Consideremos las siguiente gráficas, y apareamientos:



Observamos que una componente conexa de $G[M_1 \triangle M_2]$ es un ciclo de longitud par y la otra componente conexa es una trayectoria. Por lo tanto se cumple el lema 2.

6. **Corolario.** Toda gráfica bipartita regular no vacía contiene un apareamiento perfecto.

Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica G y apareamiento M :



Observamos que se cumple el corolario 6:

G es una gráfica bipartita 2-regular no vacía y M es un apareamiento perfecto para G .

7. **Teorema de Hall.** Sea G una gráfica bipartita con bipartición $\{U, W\}$ en conjuntos independientes. Existe un apareamiento de G que sature a todos los vértices de U si y sólo si $\forall S \subseteq U$ se satisface que $|N[S]| \geq |S|$.
8. **Teorema de Vizing.** Para toda gráfica G .

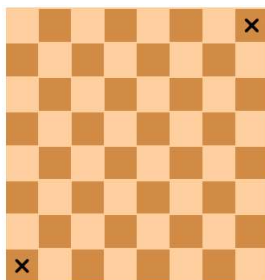
$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Es decir, $\chi' = \Delta(G)$ ó $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Nota. Por el teorema anterior, en estos contextos, dada una gráfica G , decimos que es de **clase 1** si $\chi' = \Delta(G)$ o de **clase 2** si $\chi' = \Delta(G) + 1$

6.3. Ejercicios

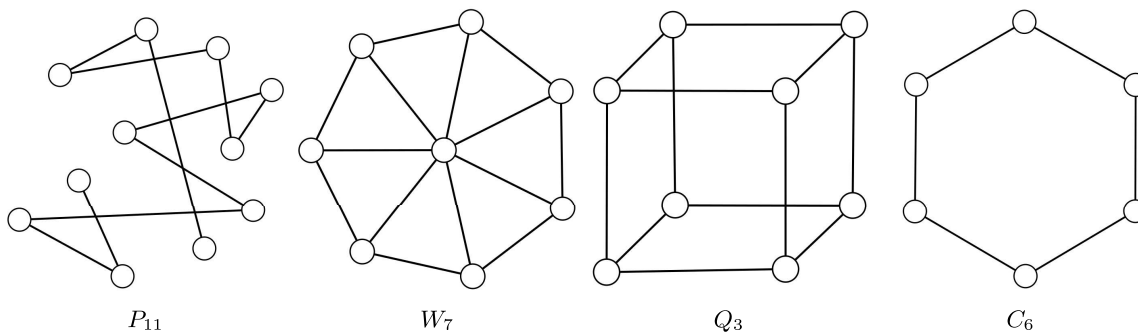
1. Demuestra que toda gráfica no vacía tiene un apareamiento. Además bajo estas condiciones, demuestra que toda gráfica tiene al menos un apareamiento maximal y al menos un apareamiento máximo.
2. Sea G una gráfica y M es un apareamiento de G . Demuestra que $|M| \leq \frac{|V|}{2}$.
3. Sea G una gráfica bipartita con bipartición $\{U, W\}$ en conjuntos independientes. ¿Bajo que condiciones existe un apareamiento de G que sature a todos los vértices de U ?
4. Demuestra que un árbol tiene, como máximo, un apareamiento perfecto.
5. ¿Es posible cubrir completamente utilizando únicamente rectángulos de dimensiones 1×2 , un cuadrado de 8×8 al que se le han quitado dos de sus esquinas opuestas (1×1)?



Problema del tablero de ajedrez mutilado

6. ¿Cuál es el índice cromático de una gráfica que es un ciclo con n vértices?
7. Sea $n \in \mathbb{N}^+$. Encuentra la clase de las siguientes gráficas:
 - a) P_n (trayectoria de n vértices).
 - b) W_n (rueda con n vértices en el ciclo exterior).
 - c) Q_3 (cubo tridimensional).
 - d) C_n (ciclo de n vértices).

Ejemplos:



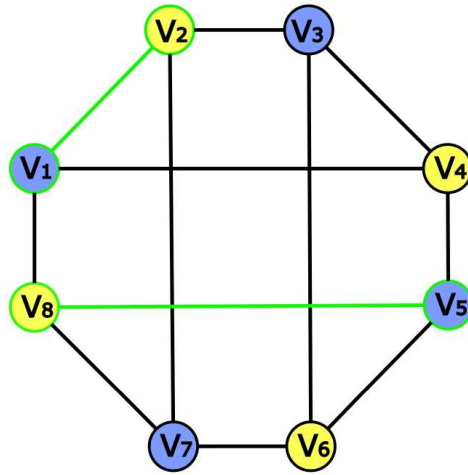
8. Demuestra que $\chi'(K_{n,m}) = \max\{m, n\}$

6.4. Algoritmo húngaro

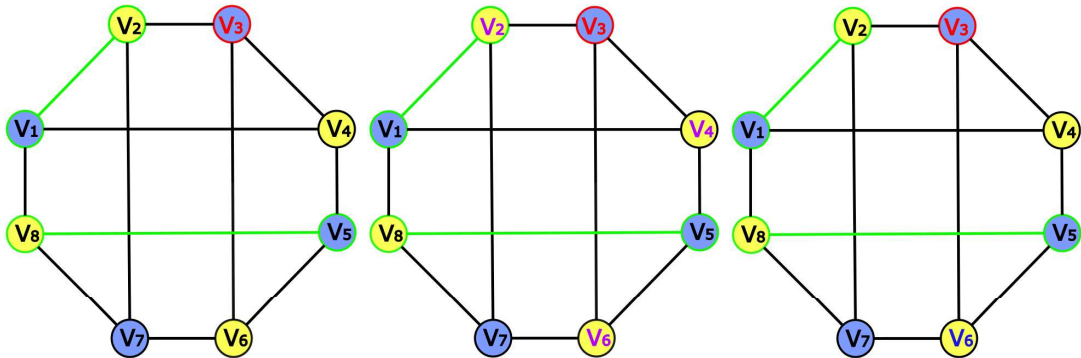
El **algoritmo húngaro** encuentra un apareamiento óptimo dada una gráfica conexa con al menos un apareamiento. Requerimos una gráfica bipartita G , con bipartición en conjuntos independientes $\{U, V\}$, un apareamiento arbitrario de G , digamos M , y dos conjuntos R y S vacíos.

1. a) Si todo vértice de U es M -saturado, termina el algoritmo.
b) Si existe un vértice de U que no sea M -saturado, digamos x , consideramos $S = S \cup \{x\}$ y procedemos al siguiente paso.
2. a) Si $N(S) = R$, por el teorema de Hall, no existe un apareamiento que sature a todos los vértices de U y termina el algoritmo.
b) Si $N(S) \neq R$, consideramos $y \in N(S) \setminus R$ y procedemos al siguiente paso.
3. a) Si y es M -saturado, consideramos $yz \in M$, es decir y y z están M -apareados. Hacemos $S = S \cup \{z\}$ y $R = R \cup \{y\}$ y regresamos al paso 2.
b) Si y no es M -saturado, entonces existe una xy -trayectoria M -aumentante, digamos T . Hacemos $M = M \triangle E(T)$ y regresamos al paso 1.

Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica G , con bipartición $\{U, V\}$, donde $U = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ y $V = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$, y el apareamiento $M = \{v_1v_2, v_5v_8\}$. Apliquemos el algoritmo húngaro.

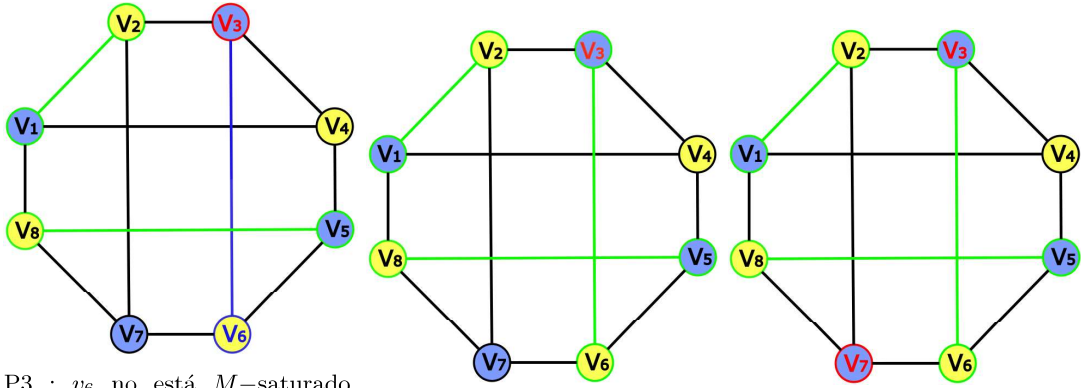


G



P1 : $v_3 \in U$ no está M -saturado. P2 : Como
Hacemos $S = \emptyset \cup \{v_3\} = \{v_3\}$ $N(S) = \{v_2, v_4, v_6\} \neq \emptyset = R$

P2 : Consideramos
 $v_6 \in N(S) \setminus R = \{v_2, v_4, v_6\}$

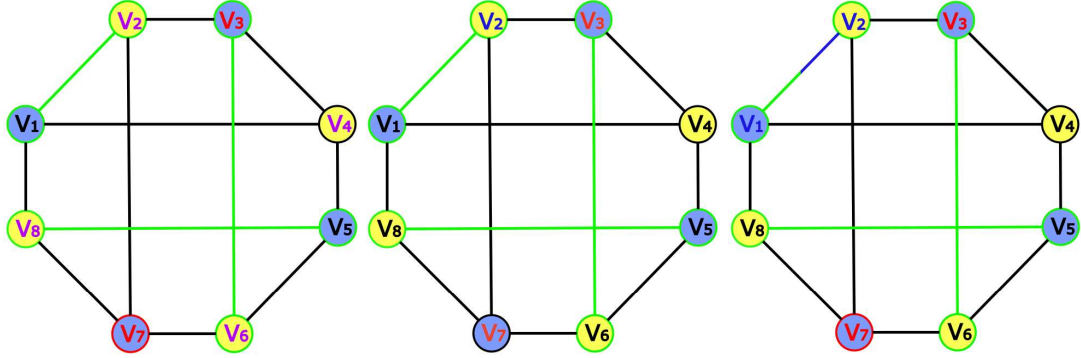


P3 : v_6 no está M -saturado.

Consideramos $T = (v_3, v_6)$ P3 : Hacemos $M = M \triangle E(T)$
que es una v_3v_6 -trayectoria = $\{v_1v_2, v_5v_8\} \triangle \{v_3v_6\}$
 M -aumentante. = $\{v_1v_2, v_5v_8, v_3v_6\}$

P1 : $v_7 \in U$ no está M -saturado.

Hacemos $S = \{v_3\} \cup \{v_7\}$
= $\{v_3, v_7\}$



P2 : Como

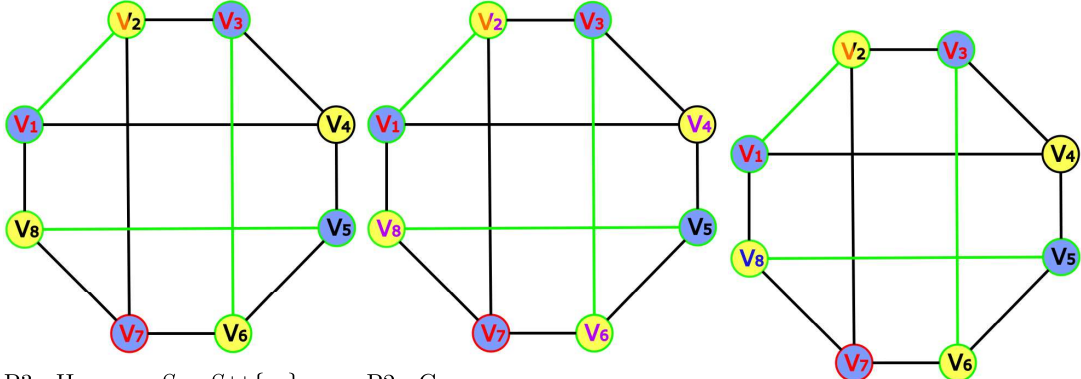
$N(S) = \{v_2, v_4, v_6, v_8\} \neq \emptyset = R$

P2 : Consideramos

$v_2 \in N(S) \setminus R = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}$

P3 : v_2 está M -saturado por

v_2v_1 .

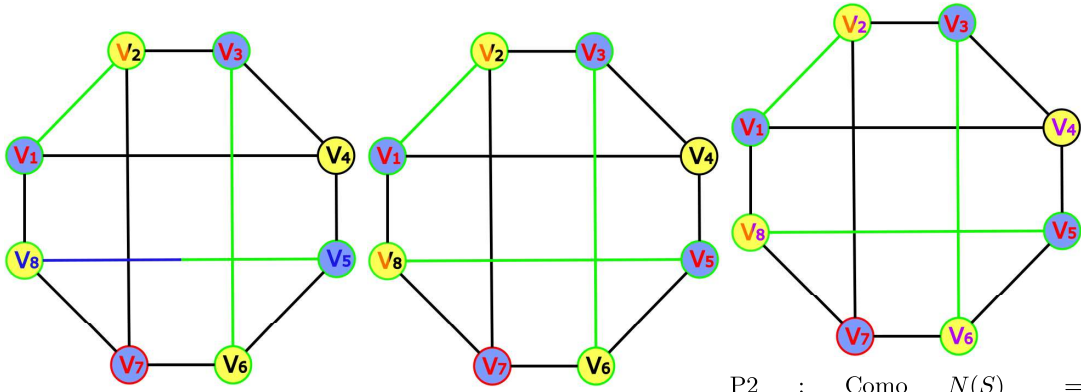


P3 : Hacemos $S = S \cup \{v_1\}$
= $\{v_3, v_7, v_1\}$ y $R = \emptyset \cup \{v_2\}$
= $\{v_2\}$

P2 : Como

$N(S) = \{v_2, v_4, v_6, v_8\} \neq \{v_2\} = R$

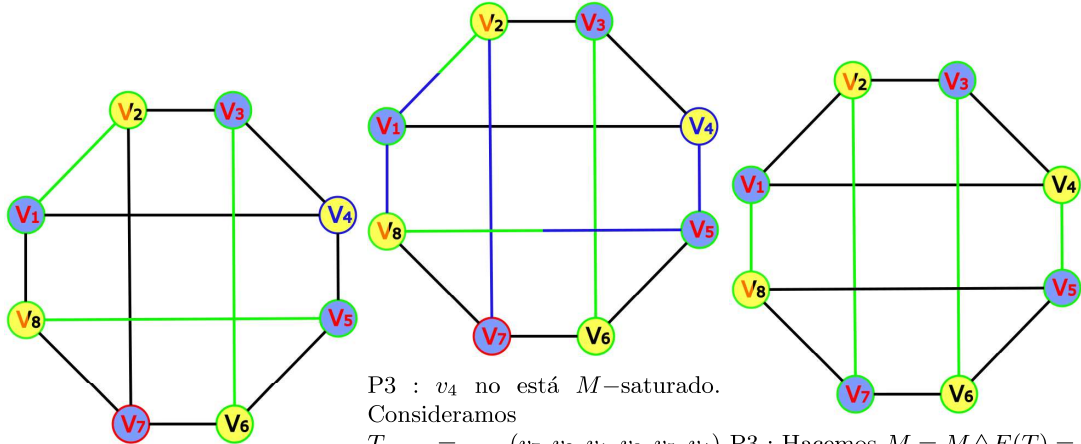
P2 : Consideramos
 $v_8 \in N(S) \setminus T = \{v_4, v_6, v_8\}$



P3 : v_8 está M -saturado por $v_8 v_5$.

P3 : Hacemos $S = \{v_3, v_7, v_1, v_5\}$ y $R = \{v_2, v_8\}$

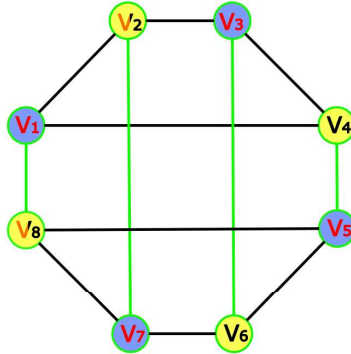
P2 : Como $N(S) = \{v_2, v_4, v_6, v_8\} \neq \{v_2, v_8\} = R$



P2 : Consideramos $v_4 \in N(S) \setminus T = \{v_4, v_6\}$

P3 : v_4 no está M -saturado. Consideramos $T = (v_7, v_2, v_1, v_8, v_5, v_4)$ que es una $v_7 v_4$ -trayectoria M -aumentante.

P3 : Hacemos $M = M \triangle E(T) = \{v_1 v_2, v_5 v_8, v_3 v_6\} \triangle \{v_7 v_2, v_2 v_1, v_1 v_8, v_8 v_5, v_5 v_4\} = \{v_1 v_8, v_7 v_2, v_3 v_6, v_5 v_4\}$



P1 : Como todo vértice de U es M -saturado, hemos concluido el algoritmo.