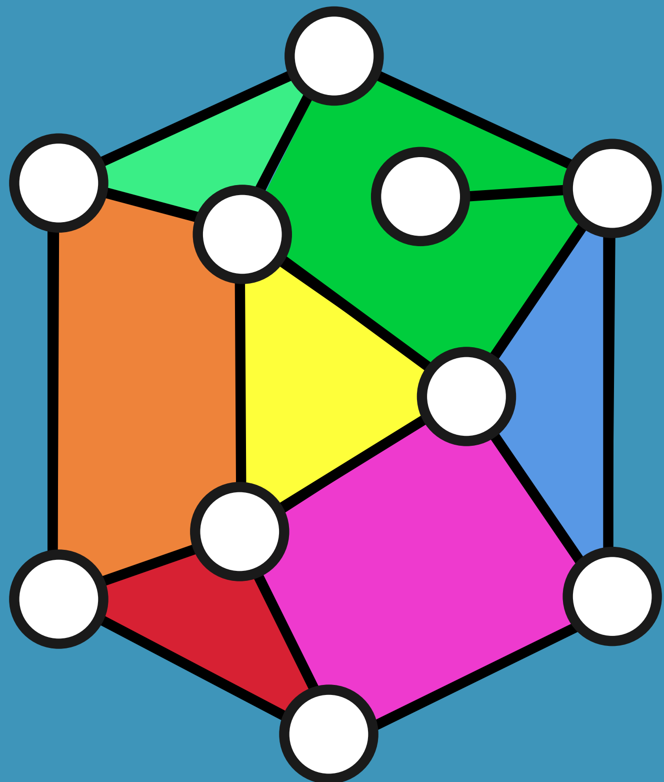


Notas de apoyo para Teoría de Gráficas I

Gráficas aplanables y coloración por vértices

Axel Leonardo Castillo Vallejo

Bajo la supervisión de: Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

2025

7. Gráficas aplanables y coloración por vértices

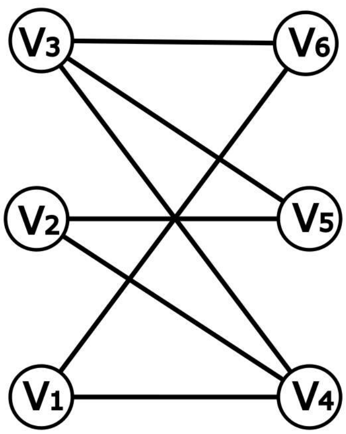
7.1. Definiciones

7.1.1. Encaje planar, gráfica aplanable y gráfica plana

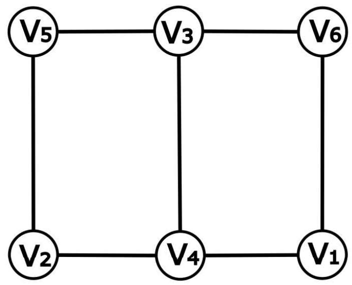
Sea G una gráfica:

1. Un **encaje planar** de G es una representación de la gráfica en el plano de tal forma que cualquier par de aristas se intersecan a lo más en sus extremos.

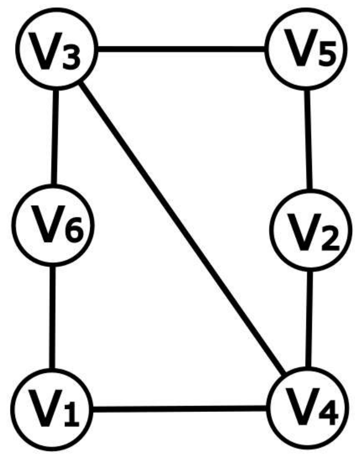
Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas:



G_a



G_b

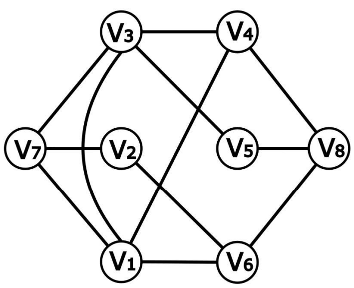


G_c

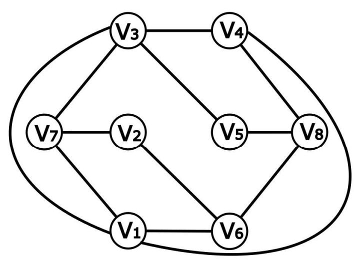
Las gráficas anteriores son todas isomorfas entre sí, es decir $G_a \cong G_b \cong G_c$, y cada una ellas es una representación en el plano de la misma gráfica, pero solo G_b y G_c son un encaje planar.

2. G es una **gráfica aplanable** si tiene un encaje planar.

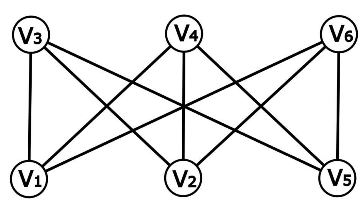
Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas:



G_a



G_b



G_c

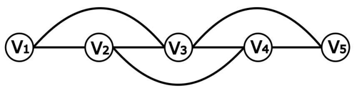
(a) La gráfica G_a es una gráfica aplanable ya que es posible construir un encaje planar para G_a, por ejemplo la gráfica G_b.

(b) La gráfica G_b es una gráfica aplanable ya que ella misma es un encaje planar.

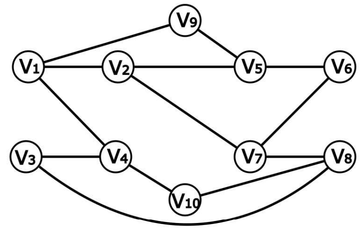
(c) $G_3 = K_{3,3}$ y se puede comprobar que no existe un encaje planar para la gráfica G_c, por lo tanto G_c no es una gráfica aplanable.

3. Si G ya está dibujada mediante un encaje planar, diremos que G es una **gráfica plana**.

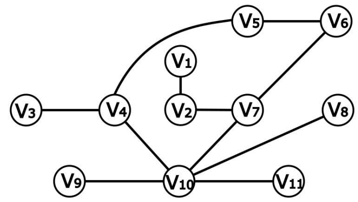
Ejemplo. Las siguientes gráficas son planas:



G_a



G_b



G_c

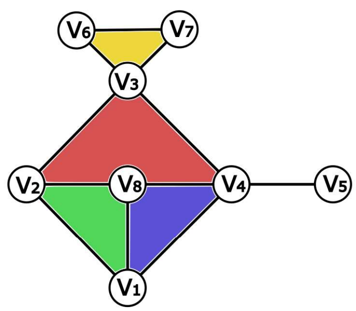
7.1.2. Caras/regiones de una gráfica plana

Sea G una gráfica plana:

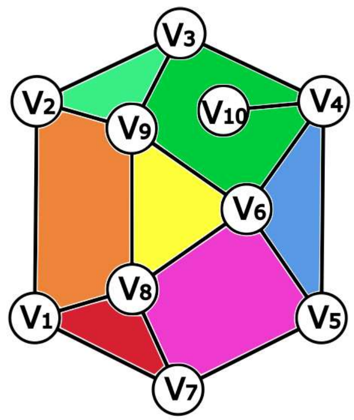
1. Las regiones conexas delimitadas por las aristas son llamadas **caras de la gráfica** o **regiones de la gráfica**.

2. La región no acotada se llamará **cara exterior**, y las otras regiones serán **caras interiores**.

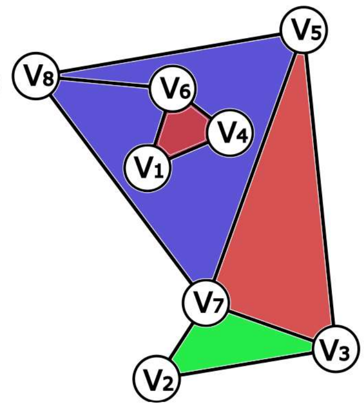
Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas:



G_a



G_b



G_c

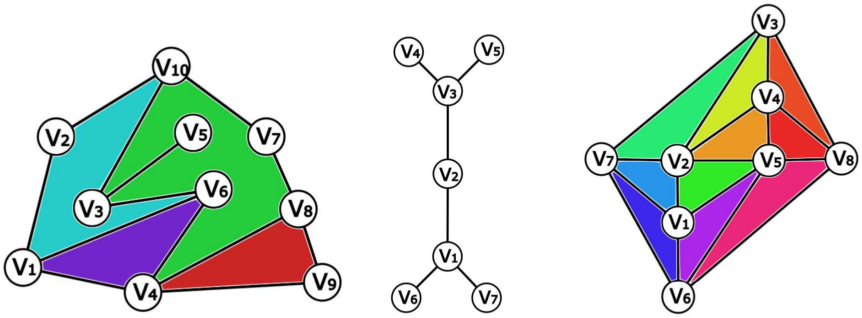
(a) La región coloreada de rojo en la gráfica G_a está delimitada por el conjunto de aristas $\{v_2v_3, v_3v_4, v_4v_8, v_8v_2\}$, como está acotada es una cara interior de la gráfica G_a. La región delimitada por el conjunto de aristas $\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_6, v_6v_7, v_7v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_4v_1\}$ no está acotada, por lo que esta es la cara exterior de la gráfica G_a.

(b) La región verde en la gráfica G_b está delimitada por el conjunto de aristas $\{v_3v_4, v_4v_{10}, v_4v_6, v_6v_9, v_9v_3\}$, como está acotada es una cara interior de la gráfica G_b. La región delimitada por el conjunto de aristas $\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_7, v_7v_1\}$ no está acotada, por lo que esta es la cara exterior de la gráfica G_b.

(c) La región azul en la gráfica G_c está delimitada por el conjunto de aristas $\{v_5v_7, v_7v_8, v_8v_6, v_6v_4, v_4v_1, v_1v_6, v_8v_5\}$, como está acotada es una cara interior de la gráfica G_c. La región delimitada por el conjunto de aristas $\{v_5v_3, v_3v_2, v_2v_7, v_7v_8, v_8v_5\}$ no está acotada, por lo que esta es la cara exterior de la gráfica G_c.

3. Al número de regiones lo denotaremos por $R(G)$.
4. Dada una región R, la **frontera de** R, denotada por $Fr(R)$, es un camino cerrado en G de longitud mínima que delimita a la región R.

Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas:



G_a G_b G_c

(a) $R(G_a) = 5$, y para la región coloreada en verde, llamemosla R_v, tenemos que su frontera es: $Fr(R_v) = (v_3, v_5, v_3, v_6, v_4, v_8, v_7, v_{10}, v_3)$

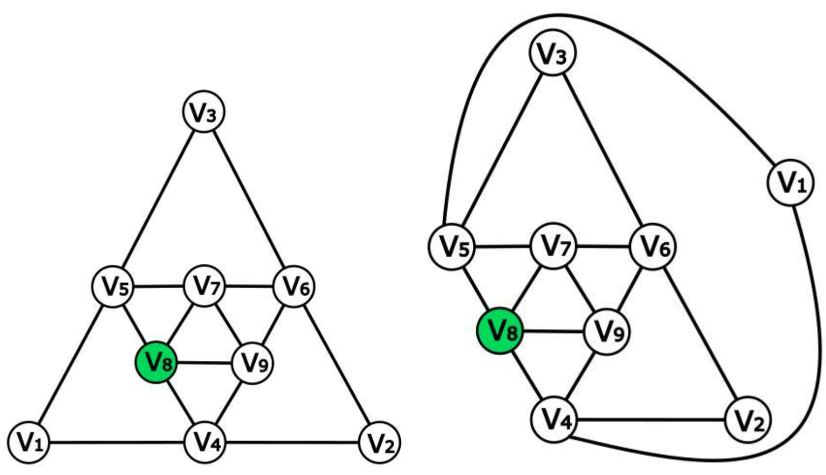
(b) $R(G_a) = 1$, es decir, únicamente tiene su región exterior, llamemosla R_e, tenemos que su frontera es: $Fr(R_e) = (v_2, v_3, v_4, v_3, v_5, v_3, v_2, v_1, v_6, v_1, v_7, v_1, v_2)$

(c) $R(G_a) = 11$, y para la región coloreada en amarillo, llamemosla R_a, tenemos que su frontera es: $Fr(R_a) = (v_2, v_4, v_3, v_2)$

7.1.3. Reglas de dibujos de gráficas aplanables

1. Si G es una gráfica aplanable y $x \in V(G)$, entonces existe un encaje planar de G tal que x está en la frontera de la cara exterior de dicho encaje.

Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas planas (por lo tanto aplanables):



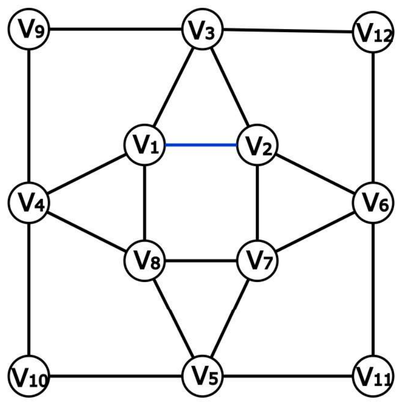
G_a G_b

(a) Observamos que v_8 no está en la frontera de la cara exterior para el encaje planar G_a.

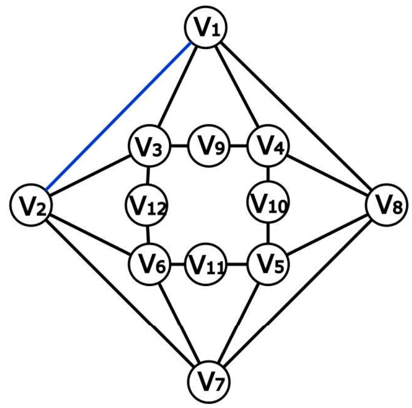
(b) G_b es un encaje planar de G_a tal que v_8 está en la frontera de su cara exterior.

2. Si G es una gráfica aplanable y $e \in E(G)$, entonces existe un encaje planar de G tal que e está en la frontera de la cara exterior de dicho encaje.

Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas planas (por lo tanto aplanables):



G_a



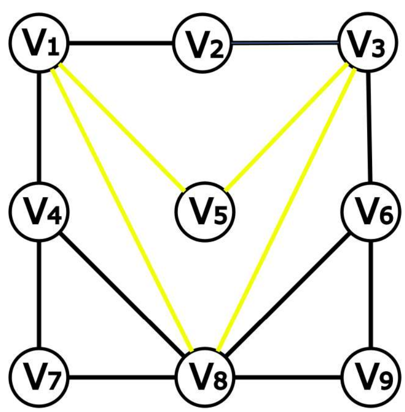
G_b

(a) Observamos que v_1v_2 no está en la frontera de la cara exterior para el encaje planar G_a.

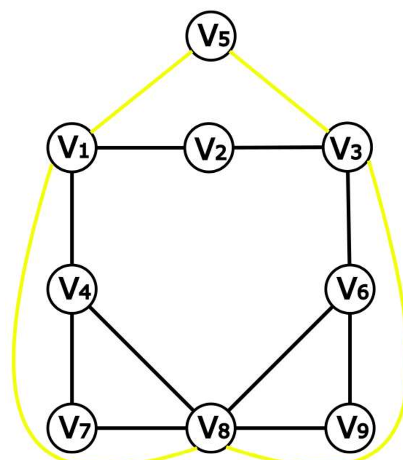
(b) G_b es un encaje planar de G_a tal que v_1v_2 está en la frontera de su cara exterior.

3. Si G es una gráfica plana y R es una región interior de G, entonces existe un encaje planar de G tal que la frontera de R es la frontera de la cara exterior de dicho encaje.

Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas planas:



G_a



G_b

(a) Consideremos la región interior con frontera $(v_1, v_5, v_3, v_8, v_1)$.

(b) G_b es un encaje planar de la gráfica G_a tal que la frontera de la región tomada en (a) es la frontera de la región exterior.

7.1.4. Coloración por vértices

1. Dada una gráfica G y un conjunto $K \neq \emptyset$, una **coloración por vértices en** G es una función $C : V(G) \to K$,

2. a los elementos del conjunto K les llamaremos los **colores de** C,

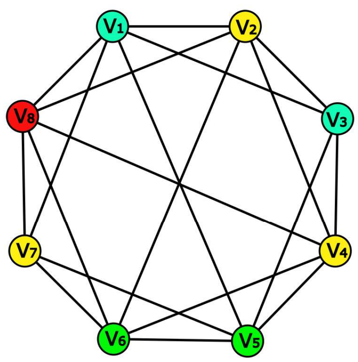
3. si $|K| = m$, podemos hacer referencia a C como una m**-coloración por vértices en** G

4. y decimos que G **es** m**-coloreable por vértices**.

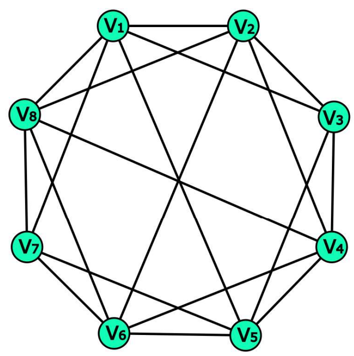
5. Si $k \in K$, la **clase cromática de** k **en** G, es el conjunto

$$\eta(k) = \{x \in V(G) : C(x) = k\}$$

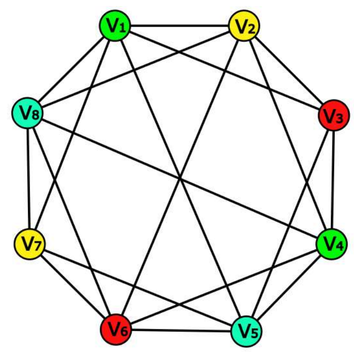
Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica y el conjunto $K = \{amarillo, rojo, verde, azul\}$:



C_a



C_b



C_c

Para C_a tenemos:

(a) La función $C_a : V(G_a) \to K$ dada por $C(v_1) = C(v_3) = azul$, $C(v_2) = C(v_4) = C(v_7) = amarillo$, $C(v_5) = C(v_6) = verde$ y $C(v_8) = rojo$. Es una coloración por vértices de G_a.

(b) Los colores de C_a son: *amarillo*, *rojo*, *verde* y *azul*.

(c) Como $|K| = 4$, decimos que C_a es una 4-coloración por vértices de G_a.

(d) Decimos que G_a es 4-coloreable por vértices.

(e) La clase cromática de *amarillo* es: $\eta(amarillo) = \{v_2, v_4, v_7\}$

La clase cromática de *rojo* es: $\eta(rojo) = \{v_8\}$

La clase cromática de *verde* es: $\eta(verde) = \{v_5, v_6\}$

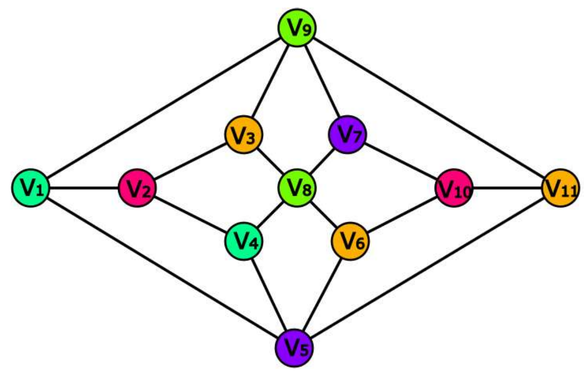
La clase cromática de *azul* es: $\eta(azul) = \{v_1, v_3\}$

7.1.5. Número cromático

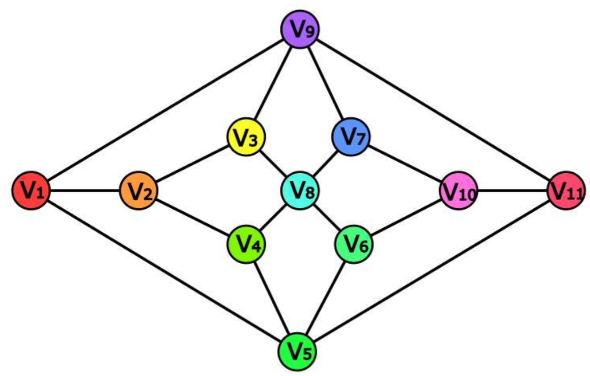
Sea G un gráfica y C una coloración por vértices en G:

1. Si $\forall uv \in E(G)$ se cumple que $C(u) \neq C(v)$, diremos que c **es una coloración propia por vértices en** G.

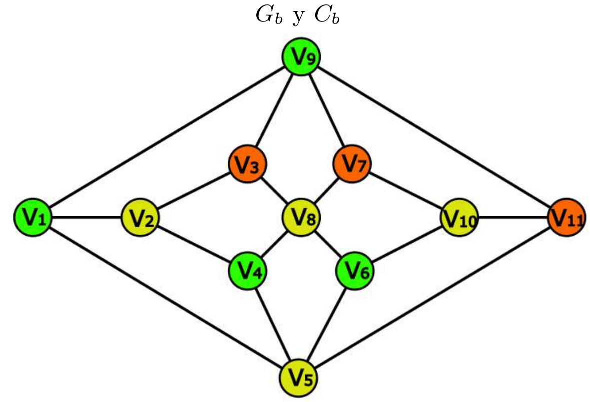
Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas y coloraciones por vértices:



G_a y C_a



G_b y C_b



G_c y C_c

(a) C_a es una coloración propia por vértices en G_a.

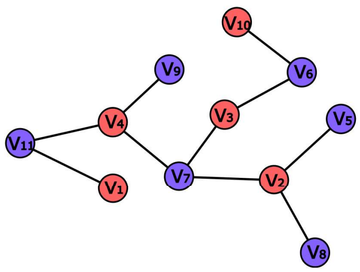
(b) C_b es una coloración propia por vértices en G_b.
Puede que visualmente no se aprecie con claridad pero todos los colores de C_b son distintos.

(c) C_c no es una coloración por vértices propia en G_c ya que $v_1v_9 \in E(G_c)$ pero $C_c(v_1) = C_c(v_9)$.

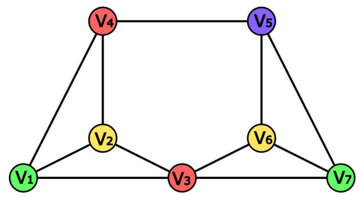
2. El **número cromático de** G, es: $\chi(G) := min\{k \in \mathbb{N} : G$ tiene una $k-$coloración por vértices propia$\}$
   Es decir, es el menor número de colores necesarios para tener una coloración por vértices propia en G.

3. Si C es una coloración por vértices propia en G con $\chi(G)$ colores, diremos que C es una **χ-coloración de** G.

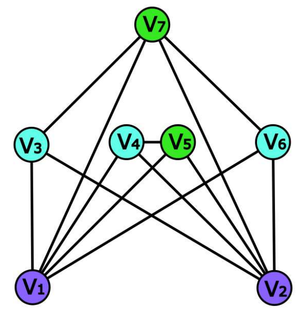
Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas y coloraciones por vértices:



G_a



G_b



G_c

(a) $\chi(G_a) = min\{k \in \mathbb{N} : G_a$ tiene una $k-$coloración por vértices propia$\} = 2$
Decimos que C_a es una χ-coloración de G_a.

(b) $\chi(G_b) = min\{k \in \mathbb{N} : G_b$ tiene una k-coloración por vértices propia $\} = 4$
Decimos que C_b es una χ-coloración de G_b.

(c) $\chi(G_c) = min\{k \in \mathbb{N} : G_c$ tiene una $k-$coloración por vértices propia$\} = 3$
Decimos que C_c es una χ-coloración de G_c.

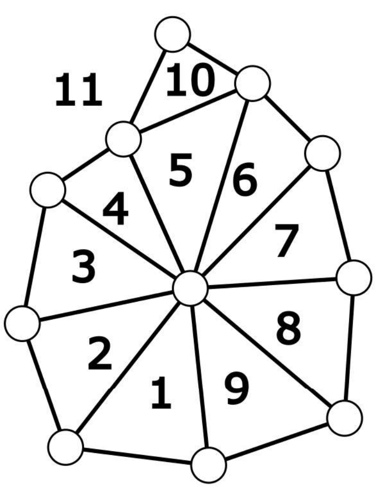
7.2. Resultados importantes

1. **Teorema de igualdad de Euler.** Si G es una gráfica conexa y plana, entonces

$$|V(G)| - |E(G)| + R(G) = 2$$

2. **Corolario.** Si G es una gráfica aplanable, entonces $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$.

Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica conexa y plana (aplanable).



Observamos que se cumplen los resultados:

Teorema de igualdad de Euler.

$$|V(G)| - |E(G)| + R(G) = 11 - 20 + 11 = 2$$

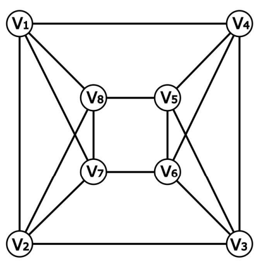
Corolario 2.

$$|E(G)| = 20 \leq 27 = 3(11) - 6 = 3|V(G)| - 6$$

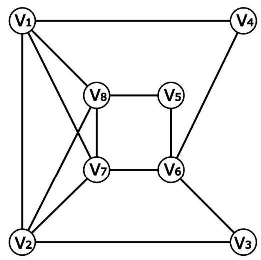
3. **Teorema de Kuratowski.** Un gráfica es aplanable si y solo si no contiene una subgráfica isomorfa a una subdivisión elemental de K_5 o $K_{3,3}$.

Nota. Una **subdivisión elemental** de una gráfica es una operación que agrega un vértice a una arista dividiendo la arista en dos.

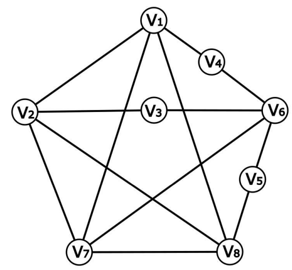
Ejemplo. Por teorema de Kuratowski, G no es aplanable ya que existe H tal que $H \leq G$ y $H \cong K$, donde K es una subdivisión elemental de K_5:



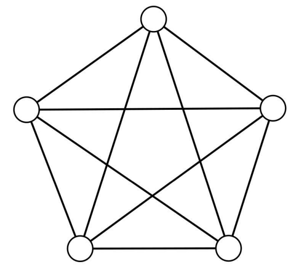
G



H



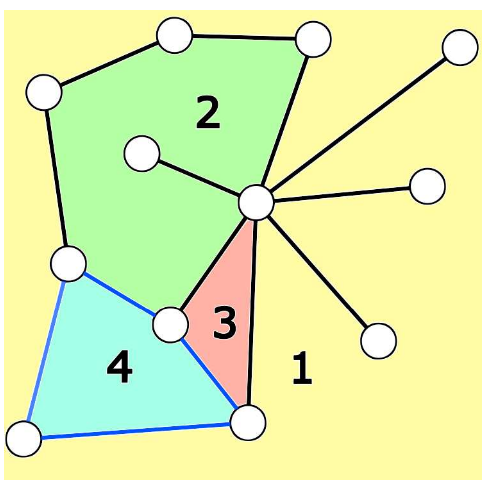
K



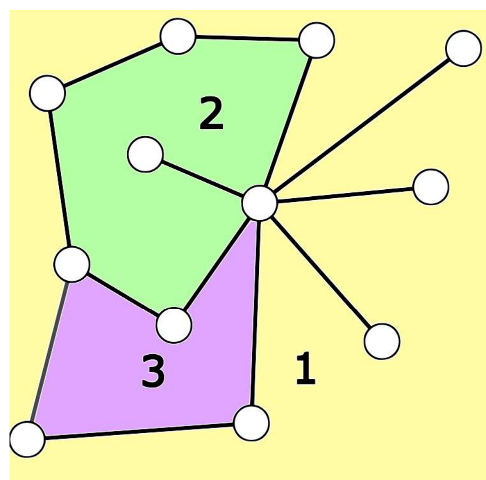
K_5

4. **Lema.** Si G es una gráfica plana y e es una arista en un ciclo de G, entonces $R(G-e) = R(G)-1$.

Ejemplo. Consideremos las siguientes gráficas y el ciclo de aristas coloreadas de azul:



G



$G-e$

Al quitar alguna arista en el ciclo, por ejemplo la arista que comparten las caras 3 y 4, llamemosla e, tenemos que $R(G-e) = 3 = 4-1 = R(G)-1$. Por lo tanto se cumple el lema 4.

5. **Lema.** Si G es una gráfica aplanable y $H \leq G$, entonces H es aplanable.

6. **Lema.** Si G es una gráfica plana, entonces contiene un vértice x tal que $\delta(x) \leq 5$.

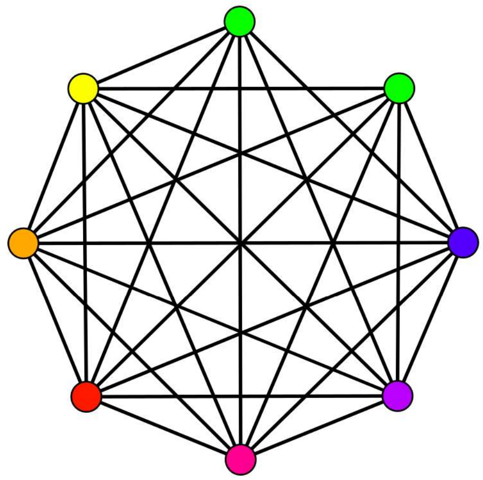
7. **Lema.** Toda gráfica tiene una coloración por vértices propia. Más aún,

$$1 \leq \chi(G) \leq |V(G)|$$

8. **Lema.** Sea G una gráfica. G es bipartita si y solo si $\chi(G) = 2$.

9. **Teorema de Brooks.** Si G es una gráfica conexa que no es completa ni un ciclo de longitud impar, entonces $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica conexa que no es completa ni un ciclo de longitud impar.



Observamos que se cumple el teorema de Brooks:

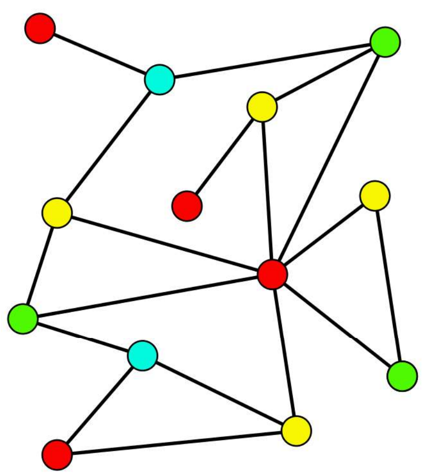
$$\chi(G) = 7 \leq 7 = \Delta(G)$$

10. **Teorema (de los cinco colores).** Si G es una gráfica aplanable, entonces $\chi(G) \leq 5$.

La demostración del siguiente teorema escapa de cualquier curso introductorio de teoría de gráficas, pero vale la pena enunciar el teorema, debido a que es aún más fuerte que el teorema de los cinco colores y en general preferimos su uso.

11. **Teorema (de los cuatro colores).** Si G es una gráfica aplanable, entonces $\chi(G) \leq 4$.

Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica conexa y plana (aplanable) y coloración de vértices C.



Observamos que se cumplen los resultados:

Lema 8. G no es bipartita por lo tanto

$$\chi(G) \neq 2$$

Teoremas 10 y 11.

$$\chi(G) \leq 4$$

Nota. La demostración del teorema de los cuatro colores, hecha en 1976, fue la primer demostración matemática de un teorema realizada con la ayuda de un ordenador. Aunque fue controvertida se considera un hito en la historia de las matemáticas.

Nota. Una versión más conocida del teorema de los cuatro colores es la que sigue:

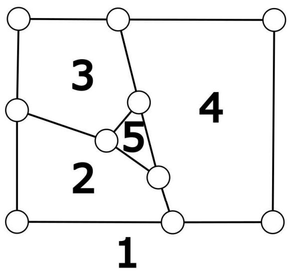
Teorema de los cuatro colores (versión "regiones"). Dado cualquier mapa con regiones continuas, este puede ser coloreado utilizando cuatro colores diferentes o menos, de forma que no queden regiones adyacentes con el mismo color.

No entraremos en detalles, pero es interesante y un buen ejercicio intuir el motivo de la equivalencia entre ambos teoremas, por lo que damos la siguiente definición y ejemplo.

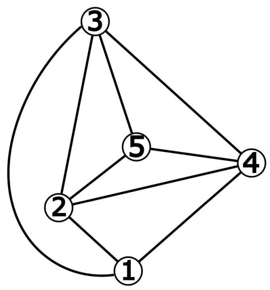
Definición. Dada una gráfica plana G. La **gráfica dual** de G, digamos G', es aquella que tiene un vértice por cada región de G y sus aristas existen si dos regiones comparten alguna aristas en G.

Nota. La anterior definición está ajustada de tal forma que las gráficas duales son también gráficas simples.

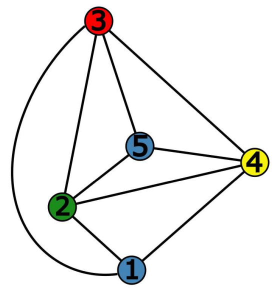
Ejemplo. Esperando animar el interés del lector por el estudio de las gráficas. A continuación, una posible idea intuitiva para demostrar la equivalencia entre las dos versiones del teorema de los cuatro colores. Además nosotros consideraremos la región exterior, la cual se suele omitir al referirnos al coloreo de mapas:



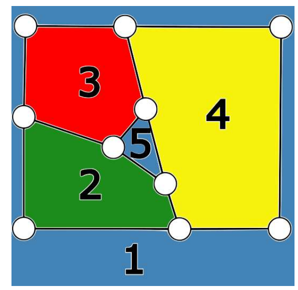
G



Dual de G, digamos G'



Coloración por vértices para G'



Coloración por “regiones” para G

7.3. Ejercicios

1. Sea G una gráfica aplanable y $H \leq G$. Demuestra H también es aplanable.
2. Demostrar que si G es plana y conexa, con $|V(G)| \geq 3$, entonces la frontera de cualquier cara interior de G tiene al menos tres aristas.
3. Demostrar que si G es plana y $e \in E(G)$, entonces e está en a lo más dos regiones de G.
4. Demostrar que si G es plana, $R_!, R_2, \ldots, R_t$ son las regiones de G y q_i el número de aristas de $Fr(R_i)$, entonces
$$\sum_{i=1}^{t} q_i \leq 2|E(G)|$$
5. Sea G es una gráfica conexa, plana, de orden p y con al menos un ciclo. Demostrar que si todo ciclo de G tiene longitud al menos $k \geq 3$, entonces
$$|E(G)| \leq \frac{k(p-2)}{k-2}$$
6. Demuestra que todo árbol es una gráfica plana.
7. Sean G una gráfica y C una coloración por vértices de G. Demuestra que una coloración por vértices es propia si y solo si toda clase cromática de C es un conjunto independiente de G.
8. Demuestra que si G es una gráfica $r-$regular, entonces
$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{|V(G)| - r}$$
9. ¿Cuál es el número cromático de una gráfica que es un ciclo con n vértices?
10. Esboza una demostración del teorema de los cuatro colores (versión “regiones”) utilizando el teorema de los cuatro colores, la definición dada de gráfica dual, y asumiendo que el dual de una gráfica aplanable es también aplanable.

7.4. Algoritmo greedy para coloraciones propias

El **algoritmo greedy para coloraciones propias** encuentra una coloración propia para una gráfica utilizando una estrategia greedy (o voraz), en el sentido de que cada paso colorea un vértice con la mejor opción disponible. Aunque el algoritmo no garantiza que sea una $\chi-$coloración para la gráfica. Requerimos una gráfica G, con $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y un conjunto $K = \{1, \ldots, n\}$ de colores.

1. Sea $C : V(G) \to K$ definida como sigue:

2. Asignamos a v_1 el color $1 \in K$, es decir $C(v_1) = 1$.

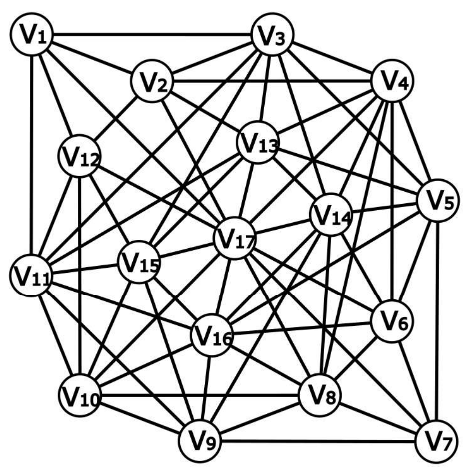
3. Para $i \in \{2, \ldots, n\}$ realizamos los siguientes pasos:

   a) Sea z_i el entero positivo más pequeño t.q. ningún vecino de v_i está coloreado con color z_i, es decir $z_i := min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i \text{ con } v_j \in N(v_i)\}\}$

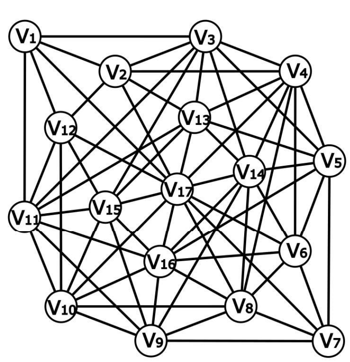
   b) Asignamos a v_i el color z_i, esto es $C(v_i) = z_i$

4. Devolvemos la coloración C.

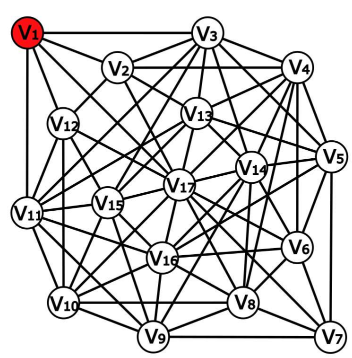
Ejemplo. Consideremos la siguiente gráfica G tal que $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, y el conjunto $K = \{1 := rojo, 2 := rosa, 3 := morado, 4 := azulfuerte, 5 := azulclaro, 6 := verde, 7 := amarillo, \ldots, n\}$. Apliquemos el algoritmo greedy para coloraciones propias.



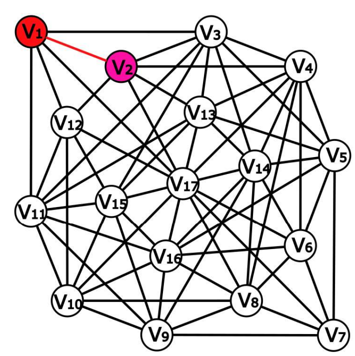
G



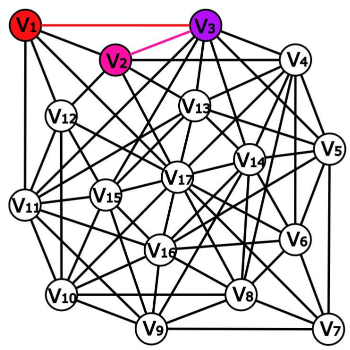
P1 : Construimos la función $C : V(G) \to K$ como sigue.



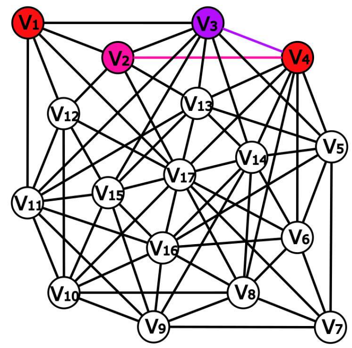
P2 : $C(v_1) = 1$



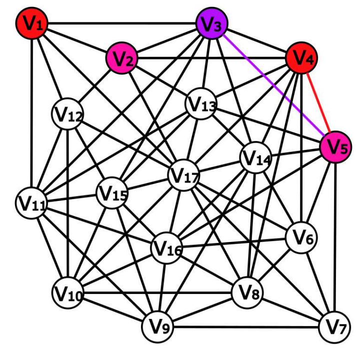
P3 : Para $i = 2$. $z_2 = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i \text{ con } v_j \in N(v_2)\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_1) = 1\}\} = 2$. Entonces $C(v_2) = z_2 = 2$



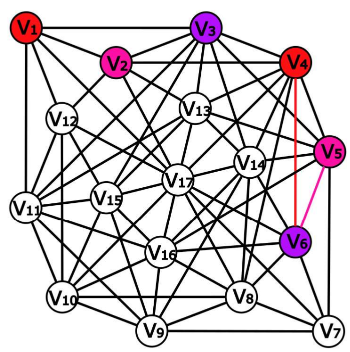
P3 : Para $i = 3$. $z_3 = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i \text{ con } v_j \in N(v_3)\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_1) = 1, C(v_2) = 2\}\} = 3$. Entonces $C(v_3) = z_3 = 3$



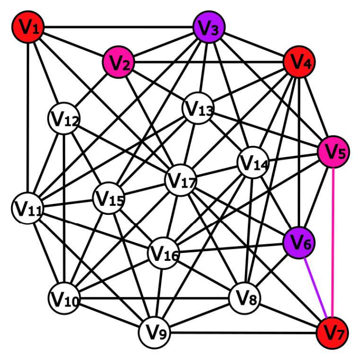
P3 : Para $i = 4$. $z_4 = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i \text{ con } v_j \in N(v_4)\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_2) = 2, C(v_3) = 3\}\} = 1$. Entonces $C(v_4) = z_4 = 1$



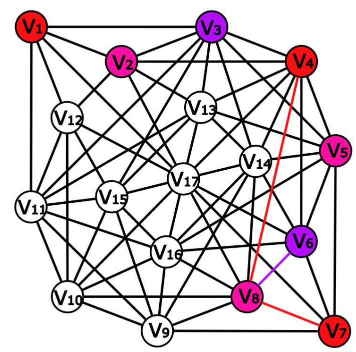
P3 : Para $i = 5$. $z_5 = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i \text{ con } v_j \in N(v_5)\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_3) = 3, C(v_4) = 1\}\} = 2$. Entonces $C(v_5) = z_5 = 2$



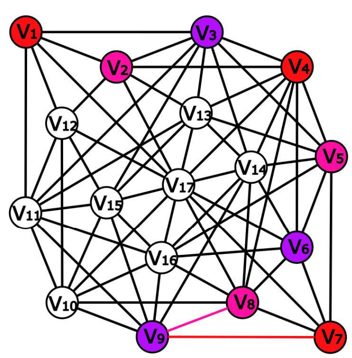
P3 : Para $i = 6$. $z_6 = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i \text{ con } v_j \in N(v_6)\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_4) = 1, C(v_5) = 2\}\} = 3$. Entonces $C(v_6) = z_6 = 3$



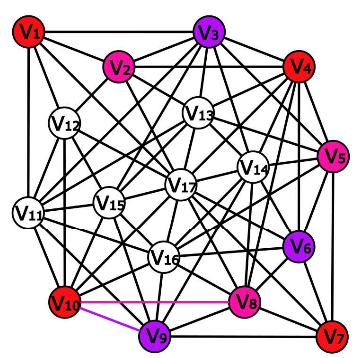
P3 : Para $i = 7$. $z_7 = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i \text{ con } v_j \in N(v_7)\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_5) = 2, C(v_6) = 3\}\} = 1$. Entonces $C(v_7) = z_7 = 1$



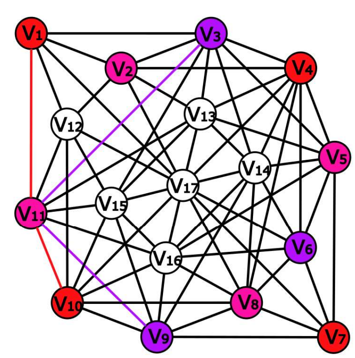
P3 : Para $i = 8$. $z_8 = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i \text{ con } v_j \in N(v_8)\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_4) = 1 = C(v_7), C(v_6) = 3\}\} = 2$. Entonces $C(v_8) = z_8 = 2$



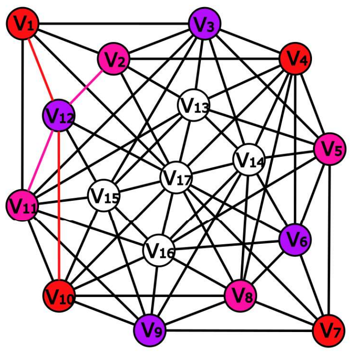
P3 : Para $i = 9$. $z_9 = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i \text{ con } v_j \in N(v_9)\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_7) = 1, C(v_8) = 2\}\} = 1$. Entonces $C(v_9) = z_9 = 1$



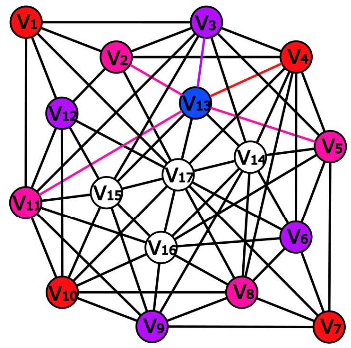
P3 : Para $i = 10$. $z_{10} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i \text{ con } v_j \in N(v_{10})\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_8) = 2, C(v_9) = 3\}\} = 1$. Entonces $C(v_{10}) = z_{10} = 1$



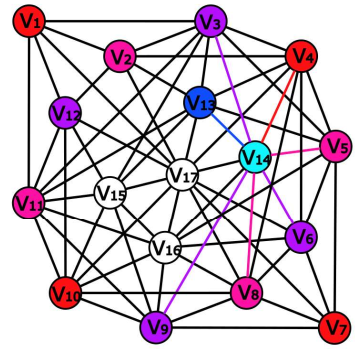
P3 : Para $i = 11$. $z_{11} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i \text{ con } v_j \in N(v_{11})\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_1) = 1 = C(v_{10}), C(v_3) = 3 = C(v_9)\}\} = 2$. Entonces $C(v_{11}) = z_{11} = 2$



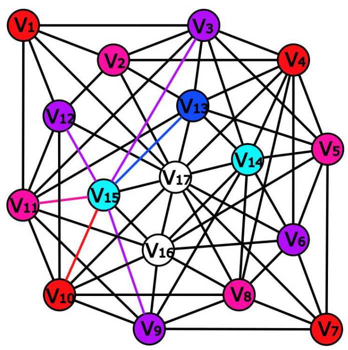
P3 : Para $i = 12$. $z_{12} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i$ con $v_j \in N(v_{12})\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_1) = 1 = C(v_{10}), C(v_2) = 2 = C(v_{11})\}\} = 2$. Entonces $C(v_{12}) = z_{12} = 2$



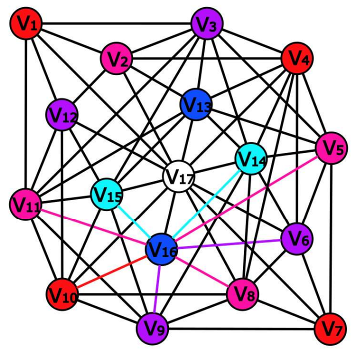
P3 : Para $i = 13$. $z_{13} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i$ con $v_j \in N(v_{13})\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{1, 2, 3\}\} = 4$. Entonces $C(v_{13}) = z_{13} = 4$



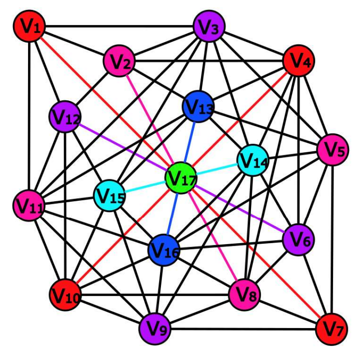
P3 : Para $i = 14$. $z_{14} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i$ con $v_j \in N(v_{14})\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{1, 2, 3, 4\}\} = 5$. Entonces $C(v_{14}) = z_{14} = 5$



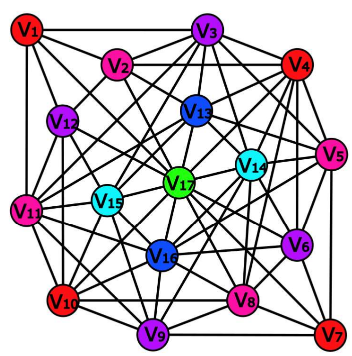
P3 : Para $i = 15$. $z_{15} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i$ con $v_j \in N(v_{15})\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{1, 2, 3, 4\}\} = 5$. Entonces $C(v_{15}) = z_{15} = 5$



P3 : Para $i = 16$. $z_{16} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i$ con $v_j \in N(v_{16})\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{1, 2, 3, 5\}\} = 4$. Entonces $C(v_{16}) = z_{16} = 4$



P3 : Para $i = 17$. $z_{17} = min\{k \in K \mid k \notin \{C(v_j) : j < i$ con $v_j \in N(v_{17})\}\} = min\{k \in K \mid k \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}\} = 6$. Entonces $C(v_{17}) = z_{17} = 6$



P4: hemos concluido el algoritmo.

Por lo tanto, una coloración propia para G es $C : V(G) \to K$ con: $C(\{v_1, v_4, v_7.v_{10}\}) = 1$, $C(\{v_2, v_5, v_8.v_{11}\}) = 2$, $C(\{v_3, v_6, v_9.v_{12}\}) = 3$, $C(\{v_{13}, v_{16}\}) = 4$, $C(\{v_{14}, v_{15}\}) = 5$ y $C(v_{17}) = 6$.