Variable Compleja I
Unidad 2: Tarea examen con soluciones

Problemas

1. (2.5 pts) Sean $a, b, z \in \mathbb{C}$. Demuestra que:

   a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ y $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$,

   b) $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1$ y $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$.

2. (2.5 pts) Considera la función

$$f(z) = z\mathrm{Im}[z],$$

   encuentra dónde la derivada $f'(z)$ existe y argumenta si la función es analítica o no.

3. (2.5 pts) Si (r, θ) son las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$, de modo que podemos describir a u y v como funciones de r y θ, muestra que las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden escribirse de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r},\ r \neq 0.$$

4. (2.5 pts) Describe la imagen del conjunto $A_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}[z] = a\},\ a \in \mathbb{R}$ bajo la función $f(z) = \cos z$.

5. (+2 pts extra) Demuestra que $H : SL(2, \mathbb{C}) \to \mathbb{M}$ definida como

$$H\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az+b}{cz+d}$$

   es un isomorfismo de grupos $(PSL(2, \mathbb{C}), \cdot) = (SL(2, \mathbb{C}))/\{-I, I\}$ y $(\mathbb{M}, \circ)$, donde

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$$

$$\text{y} \qquad \mathbb{M} = \left\{ T : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \;\middle|\; T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Soluciones

1. Recordando primero que, para $z \in \mathbb{C}$, las funciones trigonométricas se definen como:

$$\operatorname{sen} z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \text{y} \qquad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

a) Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Basta desarrollar explícitamente las expresiones para llegar a los resultados:

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} = \frac{2\big(e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}\big)}{4} \\
&= \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} + e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} + e^{i(a-b)} - e^{i(a-b)} + e^{i(b-a)} - e^{i(b-a)}}{4} \\
&= \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{i(b-a)} + e^{-i(a+b)}}{4} - \frac{e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} - e^{i(b-a)} + e^{-i(a+b)}}{-4} \\
&= \frac{(e^{ia} + e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib})}{2 \cdot 2} - \frac{(e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} - e^{-ib})}{2i \cdot 2i} \\
&= \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)\left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right) - \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}\right) \\
&= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.
\end{aligned}$$

Análogamente, para $\operatorname{sen}(a+b)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(a+b) &= \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i} = \frac{2\big(e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}\big)}{4i} \\
&= \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)} + e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)} + e^{i(a-b)} - e^{i(a-b)} + e^{i(b-a)} - e^{i(b-a)}}{4i} \\
&= \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} - e^{i(b-a)} - e^{-i(a+b)}}{4i} + \frac{e^{i(a+b)} + e^{i(b-a)} - e^{i(a-b)} - e^{-i(a+b)}}{4i} \\
&= \frac{(e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib})}{2i \cdot 2} + \frac{(e^{ib} - e^{-ib})(e^{ia} + e^{-ia})}{2i \cdot 2} \\
&= \left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right) + \left(\frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right) \\
&= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a.
\end{aligned}$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

b) Sea $z \in \mathbb{C}$. Para la primera expresión, basta desarrollarla para obtener el resultado:

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{(e^{iz}+e^{-iz})^2}{4} - \frac{(e^{iz}-e^{-iz})^2}{4}\\ &= \frac{(e^{iz})^2 + 2e^{iz}e^{-iz} + (e^{-iz})^2}{4} - \frac{(e^{iz})^2 - 2e^{iz}e^{-iz} + (e^{-iz})^2}{4}\\ &= \frac{(e^{iz})^2 + 2 + (e^{-iz})^2 - (e^{iz})^2 + 2 - (e^{-iz})^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

Ahora, partiendo de este resultado, utilizando que $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ y $\sec z = \frac{1}{\cos z}$:

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1 \implies \frac{\cos^2 z}{\cos^2 z} + \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} \implies 1 + \tan^2 z = \sec^2 z,$$

la cual es válida cuando $z \neq \pi k - \frac{\pi}{2}$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Para ambas cosas, es conveniente revisar si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, entonces la función f puede reescribirse como:

$$f(z) = z\mathrm{Im}[z] = (x + iy)y = xy + iy^2.$$

Identificando como funciones de parte real e imaginaria a $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de modo que $u(x, y) = xy$ y $v(x, y) = y^2$. Entonces, la derivada de f existirá en el dominio en que se satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \iff y = 2y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}, \iff x = 0, \end{aligned}$$

de donde se puede concluir que éstas sólo se satisfacen cuando $x = y = 0$, es decir, en $z = 0 + i0$. La derivada en este punto vale

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Para discutir sobre la analicidad de la función, al estar la derivada definida únicamente en un punto, **no existe** vecindad abierta $U_0 \subseteq \mathbb{C}$ de $z = 0$ tal que $f'(z_0)$ exista para cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$ y, por lo tanto, **no es analítica** en 0. La analicidad es una noción local, no puntual.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. El cambio de coordenadas cartesianas a polares está definido mediante las relaciones

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2, \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{cases} \iff \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Notando primero que dado el cambio de variable se tienen:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta.$$

Considerando $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, dado el cambio de variable a coordenadas polares se puede considerar la dependencia en (r,θ) como $f(z) = u(x(r,\theta), y(r,\theta)) + iv(x(r,\theta), y(r,\theta))$. Calculando las derivadas parciales de u y v respecto de r y de θ, utilizando la *Regla de la Cadena*:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial y}, \\
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}, \\
\frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial y}, \\
\frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Entonces, como f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} &= -\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial v}{\partial y} = -\operatorname{sen}\theta\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}, \\
\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial y} + \cos\theta\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\cos\theta\frac{\partial v}{\partial x} - \operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Así se verifica que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \neq 0.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ con $x, y \in \mathbb{R}$, el conjunto de interés, para cada $a \in \mathbb{R}$, es:
$$A_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z = a\} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x = a\}.$$
Tomando $w = a + iy \in A_a$, para tomar su imagen bajo $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \cos z$, teniendo presente la definición de cos para $z \in \mathbb{C}$:
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
es suficiente aplicar f a $w \in A_a$, obteniendo:
$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \frac{e^{i(a+iy)} + e^{-i(a+iy)}}{2} \\ &= \frac{e^{ia-y} + e^{-ia+y}}{2} = \frac{e^{ia}e^{-y} + e^{-ia}e^{y}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{y}(\cos a + i \operatorname{sen} a) + e^{-y}(\cos a - i \operatorname{sen} a)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(e^{y} + e^{-y}\right)\cos a + i \operatorname{sen} a \left(e^{y} - e^{-y}\right)\right] \\ &= \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right)\cos a + \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) i \operatorname{sen} a \\ &= \cosh y \cos a + i \operatorname{senh} y \operatorname{sen} a. \end{aligned}$$
Se sigue que los elementos de $f(A)$ son complejos de la forma $\cosh y \cos a + i \operatorname{senh} y \operatorname{sen} a \in \mathbb{C}$ con $a \in \mathbb{R}$ constante. Recordando de cursos de Geometría Analítica, una parametrización de la hipérbola horizontal centrada en $(0, 0)$ con longitudes de eje real a e imaginario b es $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que:
$$\gamma(t) = (a \cosh t, b \operatorname{senh} t) = (x(t), y(t)),$$
$$\text{ya que} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cosh t}{a^2} - \frac{b^2 \operatorname{senh}^2 t}{b^2} = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1.$$
donde la última igualdad se debe a la relación pitagórica de las funciones trigonométricas hiperbólicas.
Regresando al problema original, se llegó a que $f(w)$ con $w \in A_a$ es de la forma:
$$f(w) = \cosh y \cos a + i \operatorname{senh} y \operatorname{sen} a = x' + iy'.$$
Ahora, por el comentario de Geometría Analítica, las partes real $\mathrm{Re}[f(w)] = x'$ e imaginaria $\mathrm{Im}[f(w)] = y'$ se relacionan como:
$$\frac{x'^2}{\cos^2 a} - \frac{y'^2}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\cos^2 a \cosh^2 y}{\cos^2 a} - \frac{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{senh}^2 y}{\operatorname{sen}^2 a} = \cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1.$$
Así para cada $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $f(A_a)$ describe una hipérbola horizontal con ejes de longitudes $\cos a$ y $\operatorname{sen} a$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Como una última observación es interesante estudiar los casos degenerados, empezando cuando $a = k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$, en el que se tiene $\operatorname{sen} a = 0$, así regresando a la expresión $f(w)$:

$$f(w) = (-1)^{k+1} \cosh y.$$

Pero esa cantidad siempre está en el eje real y además nunca se anula ya que $(-1)^{k+1} \neq 0$ y $\cosh y \geq 1$, por lo que en ese caso la imagen es:

$$f(A_a) = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid |x| \geq 1,\ y = 0\}, \qquad a = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

De manera análoga, si $a = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ ahora se tiene $\cos a = 0$, entonces la expresión de $f(w)$ es:

$$f(w) = i(-1)^{k+1} \operatorname{senh} y.$$

Pero esa cantidad siempre está en el eje imaginario, por lo que en este caso la imagen es:

$$f(A_a) = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x = 0\}, \qquad a = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. Es conveniente primero recordar que dos grupos $(G, *)$ y $(H, \star)$ son **isomorfos** si existe $\varphi : G \to H$ tal que φ es biyectiva y para cualesquiera $g, g' \in G$ se cumple que $\varphi(g * g') = \varphi(g) \star \varphi(g')$.
   Recordando la definición de ambos grupos:

$$\begin{aligned} & SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\} \\ \text{y} \qquad & \mathbb{M} = \left\{ T : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \;\middle|\; T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc = 1 \right\}. \end{aligned}$$

   Primero, para cualquier $A \in SL(2,\mathbb{C})$, el morfismo H está bien definido ya que $\det A = 1 = ad - bc$, por lo que $H(A) \in \mathbb{M}$. Ahora, toca verificar que efectivamente es un homomorfismo, esto es, sean $A, B \in SL(2,\mathbb{C})$, es necesario verificar que para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se tiene que:

$$H(AB)(z) = (H(A) \circ H(B))(z)$$

   Por un lado se tiene que:

$$\begin{aligned} AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \\ \implies H(AB)(z) &= \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)} \end{aligned}$$

   Mientras que por el otro se tiene que:

$$\begin{aligned} (H(A) \circ H(B))(z) &= H(A)(H(B)(z)) = H(A)\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) \\ &= \frac{a\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) + b}{c\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) + d} = \frac{a\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) + b\left(\frac{\gamma z+\delta}{\gamma z+\delta}\right)}{c\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) + d\left(\frac{\gamma z+\delta}{\gamma z+\delta}\right)} \\ &= \frac{a(\alpha z + \beta) + b(\gamma z + \delta)}{c(\alpha z + \beta) + d(\gamma z + \delta)} \\ &= \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)} = H(AB)(z) \end{aligned}$$

   Así se tiene que H es un homomorfismo.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Para la parte de la biyectividad, esta función es evidentemente suprayectiva, ya que, para $T \in \mathbb{M}$, dada por

$$T(z) = \frac{mz+n}{pz+q}, \qquad mq - np = 1$$

Se tiene que existe una matriz $Q \in SL(2,\mathbb{C})$ tal que $H(Q)(z) = T(z)$, siendo ésta:

$$Q = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \implies H(Q)(z) = \frac{mz+n}{pz+q} = T(z)$$

Desafortunadamente, no es inyectiva, sean $M, N \in SL(2,\mathbb{C})$ tales que se relacionan por $N = -M$, se tiene que:

$$M = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -u & -v \\ -x & -y \end{pmatrix}$$
$$\implies H(N)(z) = \frac{-uz+(-v)}{-xz+(-y)} = \frac{-1}{-1}\frac{uz+v}{xz+y} = \frac{uz+v}{xz+y} = H(M)(z)$$

Pero, por el *Primer Teorema de Isomorfismo* para grupos, se sabe que **sí** son isomorfos $SL(2,\mathbb{C})/\mathrm{Ker}H$ e $\mathrm{Im}H = \mathbb{M}$ (ya que H es suprayectiva), entonces se puede calcular el núcleo de H para tener un isomorfismo de verdad (y "contar como una sola" a cada una de las clases de equivalencia definidas por la relación proyectiva $M \sim N \iff N = \lambda M$ para $\lambda \neq 0$). Primero, recordando el elemento neutro del grupo de transformaciones de Möbius para calcular el núcleo:

$$e \in \mathbb{M}, \qquad e(z) = z = \frac{az+0}{0z+d}, \text{ con } \frac{a}{d} = 1$$

Entonces, sea $A \in \mathrm{Ker}H$, así se tiene que:

$$A \in \mathrm{Ker}H \iff H(A)(z) = z \iff \begin{cases} b = c = 0 \\ \frac{a}{d} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = c = 0 \\ a = d \end{cases}$$

[además $ad - bc = 1$] $\implies ad - bc = ad = 1 \implies a = d = \pm 1$

Por lo que se tiene:

$$\mathrm{Ker}H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} = \{I, -I\}$$

Finalmente, por el *Primer Teorema de Isomorfismo*, se tiene que bajo H:

$$PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{I,-I\} \cong \mathbb{M}$$

A $PSL(2,\mathbb{C})$ con la operación de la multiplicación de matrices usual se le conoce como *el grupo proyectivo especial*.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323