Variable Compleja I
Unidad 2: Tarea examen

Este es un examen de trabajo individual. Debes entregarlo mediante Moodle, con todas las indicaciones precisadas en la actividad correspondiente.

1. (2.5 pts) Sean $a, b, z \in \mathbb{C}$. Demuestra que:
   a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ y $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$,
   b) $\cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a = 1$ y $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$.
2. (2.5 pts) Considera la función
$$f(z) = z\,\mathrm{Im}[z],$$
encuentra dónde la derivada $f'(z)$ existe y argumenta si la función es analítica o no.
3. (2.5 pts) Si (r, θ) son las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$, de modo que podemos describir a u y v como funciones de r y θ, muestra que las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden escribirse de la forma
$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r},\ r \neq 0.$$
4. (2.5 pts) Describe la imagen del conjunto $A_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}[z] = a\},\ a \in \mathbb{R}$, bajo la función $f(z) = \cos z$.
5. (+2 pts extra) Demuestra que $H\colon SL(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{M}$ definida como
$$H\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az+b}{cz+d}$$
es un isomorfismo de grupos $(PSL(2,\mathbb{C}), \cdot) = (SL(2,\mathbb{C}))/\{-I, I\}$ y $(\mathbb{M}, \circ)$, donde
$$SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$$
$$\text{y} \qquad \mathbb{M} = \left\{T : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \;\middle|\; T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc = 1\right\}.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323