Variable Compleja I
Unidad 3: Tarea examen con soluciones

Problemas

1. (2.5 pts) Utilizando lo conocido sobre la serie geométrica

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

da formas cerradas para:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ para $|z| < 1$ y,
b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ para $|z| < 1$.

2. (2.5 pts) Determina el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^n z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n, \quad \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}.$$

3. (2.5 pts) Utilizando la expresión de la exponencial como serie, calcula una expresión en serie de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n},$$

para la función $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3}$ en el anillo $0 \leq |z+1| < \infty$.

4. (2.5 pts) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias que converge para $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 \neq 0$. Demuestra que:

a) La serie converge absolutamente para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < |z_0|$, y que,
b) La serie converge uniformemente para $|z| \leq |z_1|$, donde $z_1 \in \mathbb{C}$ satisface que $|z_1| < |z_0|$.

5. (+2 pts extra) Sea $R > 0$. Demuestra que si $z \in \mathbb{D}_R(0)$, entonces:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{z}{R}\right)^{2^n}\right] = \frac{R^2}{R^2 - z^2}.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Soluciones

1. Por la convergencia uniforme de la serie geométrica, se puede derivar la serie "término a término".

   a) Calculando la derivada en ambos lados de la expresión de la serie geométrica se tiene que:

   $$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \frac{1}{1-z}, \\ \implies \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z}, \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} &= \frac{1}{(1-z)^2}. \end{aligned}$$

   Así, para llegar al resultado buscado, basta multiplicar por z ambos lados de la última expresión, dando así:

   $$\sum_{n=0}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1.$$

   b) Siguiendo la idea del inciso anterior, calculando la derivada en ambos lados del resultado anterior se tiene que:

   $$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} nz^n &= \frac{z}{(1-z)^2}, \\ \implies \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} nz^n &= \frac{d}{dz}\frac{z}{(1-z)^2}, \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} &= \frac{z+1}{(1-z)^3}. \end{aligned}$$

   Entonces, para concluir, nuevamente es suficiente multiplicar por z, llegando así a:

   $$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}, \quad |z| < 1.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Para cada una de las series, se utilizará un criterio distinto para determinar el radio de convergencia.

   a) Para esta serie, la sucesión de coeficientes es $\{(\ln n)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por la forma, parece conveniente usar la *fórmula de Cauchy-Hadamard* o "de la raíz" para calcular el radio de convergencia, es decir, se calculará el radio de convergencia R como:

   $$R = \frac{1}{\lambda} \quad \text{donde } \lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

   Entonces, para calcular el valor de λ de esta serie basta calcular el límite:

   $$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\ln n)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} (\ln n)^{\frac{n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty.\end{aligned}$$

   Como $\lambda = \infty$, se sigue que $R = 0$.

   b) Para esta serie, la sucesión de coeficientes es $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, parece conveniente usar la *fórmula de D'Alembert* o "del cociente" para calcular el radio de convergencia, es decir, se calculará el radio de convergencia R como:

   $$R = \frac{1}{\lambda} \quad \text{donde } \lambda = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

   Entonces, para calcular el valor de λ de esta serie basta calcular el límite:

   $$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n+2}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\right| = 1.\end{aligned}$$

   Como $\lambda = 1$, se sigue que $R = 1$.

   c) Para esta serie, la sucesión de coeficientes es $\{n!\}_{n\in\mathbb{N}}$, parece conveniente usar la *fórmula de D'Alembert* o "del cociente" para calcular el radio de convergencia, es decir, se calculará el radio de convergencia R como:

   $$R = \frac{1}{\lambda} \quad \text{donde } \lambda = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

   Entonces, para calcular el valor de λ de esta serie basta calcular el límite:

   $$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)n!}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} |n+1| = \infty.\end{aligned}$$

   Como $\lambda = \infty$, se sigue que $R = 0$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

d) Para este serie, primero hay que identificar la sucesión de coeficientes, la cual estaría dada por:

$$a_k = \begin{cases} 2^n, & \text{si } k = n!, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Partiendo de la forma de la sucesión de coeficientes, parece conveniente usar la *fórmula de D'Alembert* o "del cociente" para calcular el radio de convergencia, es decir, se calculará el radio de convergencia R como:

$$R = \frac{1}{\lambda} \quad \text{donde } \lambda = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Entonces, para calcular el valor de λ de esta serie basta calcular el límite:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n!]{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{(n-1)!}} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{(n-1)!}\ln 2} = e^{\ln 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n-1)!}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Como $\lambda = 1$, se sigue que $R = 1$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. Este tipo de serie es llamada *serie de Laurent*, en el anillo $0 \leq |z+1| < \infty$ será una serie de Laurent centrada en $z_0 = -1$, por lo que la serie buscada será de la forma:
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z+1)^n}.$$
Entonces, para dar una expresión de esa forma, basta utilizar la serie de la exponencial de modo que:
$$\begin{aligned}
f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3} &= \frac{1}{e(z+1)^3} e^{z+1} = \frac{1}{e(z+1)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{n-3}}{n!} = \frac{1}{e} \sum_{k=-3}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{(k+3)!} \\
&= \frac{1}{e} \left[\frac{(z+1)^{-3}}{0!} + \frac{(z+1)^{-2}}{1!} + \frac{(z+1)^{-1}}{2!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{(k+3)!} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e(k+3)!} (z+1)^k + \frac{1}{e} \left[\frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^3} \right].
\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. a) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < |z_0|$. Por hipótesis se tiene que la serie de números complejos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n < \infty,$$

pero se sabe que la convergencia de uma serie implica que sus términos tienden a cero, es decir, que $a_n z_0^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por la convergencia, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, se tiene que $|a_n z_0^n| < 1$, o lo que es equivalente, $|a_n| < \frac{1}{|z_0|^n}$. Entonces:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{|z_0|^n} < \infty,$$

donde se afirma que la última serie es convergente ya que $|z| < |z_0| \iff \frac{|z|}{|z_0|} < 1$, entonces esa serie es la cola de una serie geométrica (la cual converge ya que su razón común es de módulo menor a 1), así por el criterio de Cauchy para la convergencia de series se tiene que:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n z^n| < \infty \implies \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty,$$

pero esta última expresión es la correspondiente a la convergencia absoluta de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

b) Sean $z, z_1 \in \mathbb{C}$ tales que $|z| \leq |z_1|$ y $|z_1| < |z_0|$. En particular la última expresión implica que:

$$|z_1| < |z_0| \iff \frac{|z_1|}{|z_0|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z_1|^n}{|z_0|^n} < \infty,$$

donde se utilizó una vez más el criterio de convergencia de la serie geométrica para afirmar que la suma es convergente. Definiendo $M_n = \frac{|z_1|^n}{|z_0|^n}$, como $|a_n z^n| < M_n$ para toda $|z| \leq |z_1|$ y $n \in \mathbb{N}$, y por la convergencia de la serie de M_n, por el *criterio M de Weierstrass* se concluye que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. Sea $z \in \mathbb{D}_R(0)$. Examinando primero la sucesión de productos parciales:

$$
\begin{aligned}
P_1(z) &= \prod_{n=1}^{1}\left[1+\left(\frac{z}{R}\right)^{2^n}\right] = 1+\left(\frac{z}{R}\right)^2, \\
P_2(z) &= \prod_{n=1}^{2}\left[1+\left(\frac{z}{R}\right)^{2^n}\right] = P_1(z)\left[1+\left(\frac{z}{R}\right)^4\right] \\
&= 1+\left(\frac{z}{R}\right)^2+\left(\frac{z}{R}\right)^4+\left(\frac{z}{R}\right)^6, \\
P_3(z) &= \prod_{n=1}^{3}\left[1+\left(\frac{z}{R}\right)^{2^n}\right] = P_2(z)\left[1+\left(\frac{z}{R}\right)^8\right] \\
&= 1+\left(\frac{z}{R}\right)^2+\left(\frac{z}{R}\right)^4+\left(\frac{z}{R}\right)^6+\left(\frac{z}{R}\right)^8+\left(\frac{z}{R}\right)^{10}+\left(\frac{z}{R}\right)^{12}+\left(\frac{z}{R}\right)^{14}.
\end{aligned}
$$

De lo anterior, se infiere que, al tener una sucesión de índices creciente en el N-ésimo término, el producto completo se puede reescribir como:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{z}{R}\right)^{2^n}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{R}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{z}{R}\right)^2\right]^n.$$

Como $|z| < R$, en particular $\left|\left(\frac{z}{R}\right)^2\right| < 1$, entonces se puede manejar como una serie geométrica, llegando a:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{z}{R}\right)^2\right]^n = \frac{1}{1-\left(\frac{z}{R}\right)^2} = \frac{R^2}{R^2-z^2}.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323