Variable Compleja I
Unidad 4: Tarea examen con soluciones

Problemas

1. (2.5 pts) Evalúa las integrales:

   a) Considerando C como el segmento de recta que une $1-i$ y $1+i$,

   $$\int_C \sqrt{z}dz.$$

   b) Considerando C como la circunferencia $|z|=1$.

   $$\int_C \frac{e^z}{z^n}dz \qquad \text{y} \qquad \int_C \frac{e^{2z}}{(z+\frac{1}{2})(z^2+2z+2)}dz,$$

   c) Considerando C como la circunferencia $|z|=2$.

   $$\int_C \frac{dz}{z^2+1}dz.$$

2. (2.5 pts) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones analíticas en U que converge uniformemente a una función f. Demuestra que f también es analítica en U.

3. (2.5 pts) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en Ω tal que, para cualquier $z \in \Omega$, $|f(z)-1| < 1$. Demuestra que

   $$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0,$$

   para cualquier curva cerrada γ contenida en Ω.

4. (2.5 pts) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región tal que una función v es conjugada armónica de u, y a su vez $-v$ también es conjugada armónica de u. Demuestra que tanto u como v son constantes en U.

5. (+2 pts extra) Demuestra que, para $n \geq 1$:

   $$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2n)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}2\pi.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Soluciones

1. a) Para este caso, basta notar que para $f(z) = \sqrt{z}$, se tiene que $F(z) = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$ es tal que $F'(z) = f(z)$, además estas funciones, en la rama principal del logaritmo, son analíticas en $U = \mathbb{C}\backslash\{r \in \mathbb{R} \ : \ r \geq 0\}$, y la curva C está contenida en esta región, entonces:

$$\begin{aligned}\int_C \sqrt{z}dz &= F(z)|_{z=1-i}^{z=1+i} = F(1+i) - F(1-i) \\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\log(1+i)} - \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\log(1-i)} \\ &= \frac{2}{3}\left[e^{\frac{3}{2}(\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4})} - e^{\frac{3}{2}(\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4})}\right] \\ &= \frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}\ln\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{3\pi}{8}} - e^{-i\frac{3\pi}{8}}\right] = \frac{2^{\frac{11}{4}}}{3}i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

   b) Para la primera integral, considerando el disco abierto de radio 1 $B(0, 1+\epsilon)$ y la función $f(z) = e^z$, la cual es analítica en todo $\mathbb{C}$, en particular en dicho dominio, por la fórmula integral de Cauchy se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}dz = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-0)^n}dz &= \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-0)^n}dz \\ &= \frac{2\pi i}{(n-1)!}n(C,0)f^{(n)}(0) \\ &= \frac{2\pi i}{(n-1)!}e^0 = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

   Para la segunda integral, considerando el disco abierto de radio $r = 1 + \epsilon < \sqrt{2}$ dado por $B(0, 1+\epsilon)$ y la función

$$f(z) = \frac{e^{2z}}{(z^2+2z+2)},$$

   la cual es analítica en $B(0, 1+\epsilon)$ ya que tiene como únicos polos $z_\pm = -1 \pm i \notin B(0, 1+\epsilon)$ ya que $|z_\pm| = \sqrt{2}$. Así, por la fórmula integral de Cauchy se tiene que:

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{(z+\frac{1}{2})(z^2+2z+2)}dz &= \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z+\frac{1}{2}}dz \\ &= \frac{2\pi i}{1!}n(C, -\frac{1}{2})f^{(0)}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2\pi i f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{8\pi i}{5e}.\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

c) Para este caso, considerando $U = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| \leq 1\}$, el círculo de radio 2 sobre el que se integra es homotópico a cualquier otro círculo de radio $R > 1$ en U (la homotopía en este caso es la dada por la homotecia). Entonces por el teorema de Cauchy homotópico se tiene primeramente que:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{|z|=R} \frac{dz}{z^2+1}.$$

Ahora, tomando el límite cuando el círculo es de radio infinito se tiene que:

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}\right| &= \lim_{R\to\infty} \left|\int_{|z|=R} \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z^2+1|} \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{2\pi R}{R^2+1} = \lim_{R\to\infty} \frac{\frac{2\pi}{R}}{1+\frac{1}{R^2}} = 0,\end{aligned}$$

así, como el módulo es no negativo y $|w| = 0 \iff w = 0$, se concluye que:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = 0.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Sea $\epsilon > 0$. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en U, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ y $z \in U$ se cumple que:

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Ahora, como U es una región, es un abierto, entonces para $z \in U$ existe un disco abierto $B(z,r) \subseteq U$ tal que f_n es analítica en $B(z,r)$, en particular, por el Teorema de Cauchy, por la analicidad de las f_n se cumple que:

$$\int_\gamma f_n(z)dz = 0,$$

para las curvas γ contenidas en el disco. Ahora, respecto a f se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma f(z)dz\right| &= \left|\int_\gamma f(z)dz - 0\right| \\
&= \left|\int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f_n(z)dz\right| \\
&= \left|\int_\gamma [f(z) - f_n(z)]dz\right| \\
&\leq \int_\gamma |f(z) - f_n(z)||dz| \leq \int_\gamma \epsilon|dz| = \epsilon\mathrm{long}(\gamma).
\end{aligned}$$

Tomando $\epsilon^* = \epsilon\mathrm{long}(\gamma)$, valor que se puede hacer arbitrariamente pequeño, se tiene que:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| < \epsilon^* \implies \int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Así que, por el teorema de Morera, f es analítica en el disco $B(z,r)$, y como $z \in U$ fue arbitrario, f es analítica en $\bigcup_{z\in U} B(z,r) = U$, de modo que f es analítica en U.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. Como para cualquier $z \in \Omega$, $|f(z) - 1| < 1$, en particular $f(\Omega) \subseteq B(1, 1)$, en particular $\mathrm{Re}[f(z)] > 0$ para cualquier $z \in \Omega$. Ahora, en este disco centrado en $w = 1$, el logaritmo de sus elementos es:

$$\log w = \ln |z| + i\theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi) \implies \arg(f(z)) \in [-\pi, \pi).$$

Considerando $g(z) = \log(f(z))$, la cual es analítica por el comentario anterior, cuya derivada, por la regla de la cadena, es:

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

entonces, examinando la intagral y por el teorema fundamental del cálculo para curvas (o por haber hallado una función potencial), considerando que $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es cerrada (es decir, $\gamma(a) = \gamma(b)$):

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_\gamma g'(z) dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 0.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Dos funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son armónicas conjugadas si son armónicas, es decir, cumplen $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$, donde Δ denota al *laplaciano*, y si además satisfacen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann. En este caso se tiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

y a su vez

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 (-v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (-v)}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (-v)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial (-v)}{\partial x}.$$

Utilizando la linealidad de la derivada parcial, las últimas condiciones se traducen en:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Entonces, dadas las primeras condiciones de Cauchy-Riemann, la primera de estas últimas expresiones implica que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} \implies 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \implies u(x, y) = k + h(y),$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es constante y h es una posible función dependiente de y. Del mismo modo, por las expresiones no utilizadas aún se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y} \implies 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \implies u(x, y) = p + q(x),$$

donde $p \in \mathbb{R}$ es constante y q es una posible función dependiente de x. Comparando ambas expresiones se sigue que:

$$k + h(y) = u(x, y) = p + q(x),$$

que, dado que $U \subset \mathbb{C}$ es una región, en particular es un abierto conexo, por lo tanto, la función u es constante en dicha región, es decir, $u(x, y) = C_u$, donde $C_u \in \mathbb{R}$ es una constante.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

De manera completamente análoga para v se cumple que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} \implies 2\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \implies v(x,y) = m + n(y),$$

donde $m \in \mathbb{R}$ es constante y n es una posible función dependiente de y. Del mismo modo, por las expresiones no utilizadas aún se tiene que:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} \implies 2\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \implies v(x,y) = b + o(x),$$

donde $b \in \mathbb{R}$ es constante y o es una posible función dependiente de x, comparando ambas expresiones se sigue que:

$$m + n(y) = v(x,y) = b + o(x),$$

que, dado que $U \subset \mathbb{C}$ es una región, en particular es un abierto conexo, por lo tanto, la función v es constante en dicha región, es decir, $v(x,y) = C_v$, donde $C_v \in \mathbb{R}$ es una constante.
Así se concluye que $u(x,y) = C_u$ y $v(x,y) = C_v$ en una región $U \subset \mathbb{C}$ para $C_u, C_v \in \mathbb{R}$ constantes.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. Sea $z = e^{i\theta}$, entonces por la expresión del coseno en términos de la exponencial de un imaginario, éste se puede reescribir como:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

de modo que se puede hacer un cambio de variable entre z y θ, dado por $z = e^{i\theta} \implies dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, así que, por el teorema del Binomio, la integral se convierte a una integral sobre el círculo unitario C:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta &= \int_C \left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right]^{2n} \frac{1}{iz} dz \\
&= \frac{1}{i2^{2n}} \int_C \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz \\
&= \frac{1}{i2^{2n}} \int_C \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k} dz \\
&= \frac{1}{i2^{2n}} \int_C \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-k+1} dz \\
&= \frac{1}{i2^{2n}} \int_C \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n-2k+1} dz \\
&= \frac{1}{i2^{2n}} \binom{2n}{n} 2\pi i = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} 2\pi \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{n!n!} 2\pi = \frac{(2n-1)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2} 2\pi.
\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323