Variable Compleja I
Unidad 4: Tarea examen

Este es un examen de trabajo individual. Debes entregarlo mediante Moodle, con todas las indicaciones precisadas en la actividad correspondiente.

1. (2.5 pts) Evalúa las integrales:

   a) Considerando C como el segmento de recta que une $1 - i$ y $1 + i$,
   $$\int_C \sqrt{z}dz.$$

   b) Considerando C como la circunferencia $|z| = 1$.
   $$\int_C \frac{e^z}{z^n}dz \qquad \text{y} \qquad \int_C \frac{e^{2z}}{(z+\frac{1}{2})(z^2+2z+2)}dz,$$

   c) Considerando C como la circunferencia $|z| = 2$.
   $$\int_C \frac{dz}{z^2+1}dz.$$

2. (2.5 pts) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones analíticas en U que converge uniformemente a una función f. Demuestra que f también es analítica en U.

3. (2.5 pts) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en Ω tal que, para cualquier $z \in \Omega$, $|f(z) - 1| < 1$. Demuestra que
   $$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0,$$
   para cualquier curva cerrada γ contenida en Ω.

4. (2.5 pts) Sea $U \subseteq \mathbb{C}$ una región tal que una función v es conjugada armónica de u, y a su vez $-v$ también es conjugada armónica de u. Demuestra que tanto u como v son constantes en U.

5. (+2 pts extra) Demuestra que, para $n \geq 1$:
   $$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta = \frac{(2n-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2n)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}2\pi.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323