Variable Compleja I
Unidad 5: Tarea examen con soluciones

Problemas

1. (2.5 pts) Determina el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2},$$

en el anillo definido por $0 < |z-1| < 2$.
Sugerencia. Factoriza y halla alguna expresión relacionada con la serie geométrica.

2. (2.5 pts) Utilizando el teorema del residuo, calcula la integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Sugerencia. Para calcular los polos de la función, escribe $\operatorname{sen}\theta$ en términos de $z = e^{i\theta}$. Ojo: no todos los polos son necesarios.

3. (2.5 pts) Considera la siguiente función:

$$F(s) = \frac{s+4}{s^2+2s-3}.$$

Utilizando el teorema del residuo, calcula la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{st}ds.$$

4. (2.5 pts) Sean $n, k \in \mathbb{N}$ de modo que $k < n$. Demuestra que:

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}dz.$$

Sugerencia. Utiliza el teorema del binomio.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. (+2 pts extra) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$ una sucesión de números complejos sin puntos de acumulación finitos tal que

$$0 < |a_1| < |a_2| < \cdots < |a_n| < \cdots ,$$

y f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples únicamente en $\{a_n\}$ tal que

$$\mathrm{Res}(f, a_n) = b_n.$$

Sea también $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de curvas cerradas simples (recorridas en sentido positivo) de modo que la región acotada por Γ_n contiene únicamente a $a_1, a_2, ..., a_n$ que además satisface:

a) $R_n = \mathrm{dist}(0, \Gamma_n) = \min\{|z| \ : \ z \in \Gamma_n\} \to \infty$ cuando $n \to \infty$,

b) $L_n \leq c_0 R_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, donde L_n es la longitud de Γ_n y $c_0 \in \mathbb{R}^+$,

c) Existe una $M > 0$ independiente de n tal que $|f(z)| < M$ para cualquier $z \in \Gamma_n$.

Demuestra que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Soluciones

1. Primero, es importante notar que:

$$\frac{1}{(z+1)^2} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z+1}.$$

Ahora, factorizando el denominador de la función de interés, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2-1)^2} &= \frac{1}{[(z-1)(z+1)]^2} = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}\\ &= \frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\left(-\frac{1}{z+1}\right)\\ &= -\frac{1}{(z-1)^2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2-(1-z)}\right)\\ &= -\frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1-z}{2}\right)}\right).\end{aligned}$$

Si $\left|\frac{1-z}{2}\right| < 1$, esto último se puede expresar como una serie geométrica, además, esta condición es equivalente a

$$0 < \left|\frac{1-z}{2}\right| < 1 \iff 0 < |1-z| < 2 \iff 0 < |z-1| < 2,$$

por lo que el desarrollo como serie geométrica es consistente con la región para la serie. Sustituyendo y simplificando, se sigue que, por la convergencia uniforme de la serie geométrica en la región dada:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z^2-1)^2} &= -\frac{1}{2(z-1)^2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1-z}{2}\right)}\right) = -\frac{1}{2(z^2-1)^2}\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n\right]\\ &= -\frac{1}{2(z^2-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{d}{dz}(z-1)^n = -\frac{1}{2(z^2-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}n(z-1)^{n-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}n(z-1)^{n-1-2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-3}\\ &= \sum_{k=-2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+4}(k+3)}{2^{k+4}}(z-1)^k = \sum_{k=-2}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+3)}{2^{k+4}}(z-1)^k\\ &= \frac{1}{4(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+3)}{2^{k+4}}(z-1)^k.\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Sea $z = e^{i\theta}$, entonces por la expresión del seno en términos de la exponencial de un imaginario, éste se puede reescribir como:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta &= \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \\
\implies \operatorname{sen}^2\theta &= \left[\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^2 = -\frac{1}{4}\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2}\right),
\end{aligned}
$$

de modo que se puede hacer un cambio de variable entre z y θ, dado por $z = e^{i\theta} \implies dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$, en particular, para $\theta \in [0, 2\pi)$, el cambio de variable parametriza una circunferencia de radio 1, así:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2\theta} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{iz}\frac{1}{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2}\right)}dz \\
&= -i\int_{|z|=1} \frac{1}{z - \frac{z}{4}\left(\frac{z^4 - 2z^2 + 1}{z^2}\right)}dz \\
&= -i\int_{|z|=1} \frac{1}{z - \frac{(z^4 - 2z^2 + 1)}{4z}}dz \\
&= i\int_{|z|=1} \frac{4z}{z^4 - 6z^2 + 1}dz.
\end{aligned}
$$

Ahora, para poder resolver la integral anterior con el teorema del residuo, utilizando $w = z^2$, las raíces del denominador son:

$$
\begin{aligned}
z^4 - 6z^2 + 1 = 0 \iff w^2 - 6w + 1 = 0 \iff w_{1,2} &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{2} = 3 \pm \sqrt{8} \\
\iff z_{1,2}^2 = 3 \pm \sqrt{8} \iff &\begin{cases} z_1 = \sqrt{3 + \sqrt{8}}, \\ z_2 = -\sqrt{3 + \sqrt{8}}, \\ z_3 = \sqrt{3 - \sqrt{8}}, \\ z_4 = -\sqrt{3 - \sqrt{8}}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Al no anular a $f(z) = 4z$, todas las raíces son polos simples del integrando, además sólo z_3 y z_4 están dentro de la región de integración, así que la integral, por el teorema del residuo, será:

$$
\int_{|z|=1} \frac{4z}{z^4 - 6z^2 + 1}dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{4z}{z^4 - 6z^2 + 1}, z_3\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{4z}{z^4 - 6z^2 + 1}, z_4\right)\right].
$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Los residuos se pueden calcular utilizando las raíces obtenidas, $i = 3, 4$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{4z}{z^4 - 6z^2 + 1}, z_i\right) &= \lim_{z \to z_i} \frac{4z}{(z - z_1)(z + z_1)(z - z_i)(z + z_i)}(z - z_i) \\
&= \lim_{z \to z_i} \frac{4z}{(z - z_1)(z + z_1)(z + z_i)} \\
&= \frac{4z_i}{(z_i - z_1)(z_i + z_1)2z_i} = \frac{2}{z_i^2 - z_1^2} = -\frac{1}{\sqrt{8}},
\end{aligned}$$

por lo que la integral a lo largo de la circunferencia completa es

$$\begin{aligned}
&\int_{|z|=1} \frac{4z}{z^4 - 6z^2 + 1} dz = 2\pi i \left[-\frac{2}{\sqrt{8}}\right] = -4\pi i \frac{1}{\sqrt{8}}, \\
&\implies \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta} = i \int_{|z|=1} \frac{4z}{z^4 - 6z^2 + 1} dz = \frac{4\pi}{\sqrt{8}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando la periodicidad de $\operatorname{sen}^2 \theta$ (la mitad del periodo que $\operatorname{sen} \theta$), se concluye que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{8}}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. Sustituyendo F, la integral a calcular es explícitamente:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{s+4}{s^2+2s-3}\right)e^{st}ds.$$

Por el teorema del residuo, en general, se tiene que esta integral se puede evaluar como:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{s+4}{s^2+2s-3}\right)e^{st}ds=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[\left(\frac{s+4}{s^2+2s-3}\right)e^{st},s_k\right],$$

donde $\{s_k\}_{k=1}^{n}$ son los polos de la función producto indicada. Para identificar los polos, basta notar que éstos son los valores s tales que:

$$s^2+2s-3=0 \iff (s+3)(s-1)=0 \iff \begin{cases} s_1=-3,\\ s_2=1.\end{cases}$$

Calculando los residuos con la definición:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(F(s),s_1)&=\operatorname{Res}\left[\left(\frac{s+4}{s^2+2s-3}\right)e^{st},-3\right]=\lim_{s\to-3}\frac{s+4}{s^2+2s-3}e^{st}(s+3)\\
&=\lim_{s\to-3}\frac{s+4}{(s+3)(s-1)}e^{st}(s+3)=\lim_{s\to-3}\frac{s+4}{s-1}e^{st}=-\frac{1}{4}e^{-3t},\\
\operatorname{Res}(F(s),s_2)&=\operatorname{Res}\left[\left(\frac{s+4}{s^2+2s-3}\right)e^{st},1\right]=\lim_{s\to1}\frac{s+4}{s^2+2s-3}e^{st}(s-1)\\
&=\lim_{s\to1}\frac{s+4}{(s+3)(s-1)}e^{st}(s-1)=\lim_{s\to1}\frac{s+4}{s+3}e^{st}=\frac{5}{4}e^{t},
\end{aligned}$$

que, al sustituir en la expresión original, se concluye que el valor de la integral, para cada $t\in\mathbb{R}$ es:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{s+4}{s^2+2s-3}\right)e^{st}ds=-\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{5}{4}e^{t}.$$

A la función definida por la transformación integral

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(s)e^{st}ds,$$

se le conoce como la *transformada inversa de Laplace* de F y se le denota por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Para esto, basta notar que $f(z) = (1+z)^n$ es polinomial, por lo que los coeficientes de su expansión como serie de potencias son justamente los coeficientes de cada término del polinomio, más aún, por el teorema del binomio se sabe que éstos son:

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k.$$

Además, la función $g(z) = \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}$ tiene un polo de orden $k+1$ en 0, entonces, por lo anterior y el teorema del residuo se concluye que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz = \operatorname{Res}\left[\frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}, 0\right] = \binom{n}{k}.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. Primero, para $z_0 \notin \{a_n\}$, la hipótesis sobre los polos de f implica que los residuos de $\frac{f(z)}{z-z_0}$ son tales que:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z-z_0}, a_n\right) &= \lim_{z\to a_n}(z-a_n)\frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{b_n}{a_n - z_0},\\ \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z-z_0}, z_0\right) &= \lim_{z\to 0}(z-z_0)\frac{f(z)}{z-z_0} = f(z_0).\end{aligned}$$

Entonces, por el teorema del residuo, se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k - z_0},$$

en particular, considerando a f analítica en $z=0$, lo anterior implica que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(z)}{z}dz = f(0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{a_k}.$$

Restando las dos expresiones anteriores, se sigue que:

$$\begin{aligned}f(z_0) - f(0) + \sum_{k=1}^{n} b_k\left(\frac{1}{a_k - z_0} - \frac{1}{a_k}\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} f(z)\left(\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z}\right)dz\\ &= \frac{z_0}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(z)}{z(z-z_0)}dz.\end{aligned}$$

Ahora, aplicando la desigualdad del triángulo para integrales:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(z)}{z(z-z_0)}dz\right| &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n}\left|\frac{f(z)}{z(z-z_0)}\right||dz| = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n}\frac{|f(z)|}{|z(z-z_0)|}|dz|\\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_n}\frac{M}{R_n(R_n - |z_0|)}|dz| = \frac{1}{2\pi}\frac{ML_n}{R_n(R_n - |z_0|)}\\ &\le \frac{1}{2\pi}\frac{Mc_0R_n}{R_n(R_n - |z_0|)} = \frac{1}{2\pi}\frac{c_0M}{R_n - |z_0|}.\end{aligned}$$

De lo anterior, como $R_n \to \infty$ y por las propiedades del módulo:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(z)}{z(z-z_0)}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{c_0M}{R_n - |z_0|} = 0\\ &\implies \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(z)}{z(z-z_0)}dz = 0.\end{aligned}$$

A su vez, por la primera observación, el límite anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[f(z_0) - f(0) + \sum_{k=1}^{n} b_k\left(\frac{1}{a_k - z_0} - \frac{1}{a_k}\right)\right] = 0\\ &\iff f(z_0) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{1}{z_0 - a_k} + \frac{1}{a_k}\right).\end{aligned}$$

A esta expresión se le conoce como *expansión de Mittag-Leffler*.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323