Variable Compleja I
Unidad 5: Tarea examen

Este es un examen de trabajo individual. Debes entregarlo mediante Moodle, con todas las indicaciones precisadas en la actividad correspondiente.

1. (2.5 pts) Determina el desarrollo en serie de Laurent de la función
$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2},$$
en el anillo definido por $0 < |z-1| < 2$.
Sugerencia. Factoriza y halla alguna expresión relacionada con la serie geométrica.

2. (2.5 pts) Utilizando el teorema del residuo, calcula la integral
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}.$$
Sugerencia. Para calcular los polos de la función, escribe $\operatorname{sen}\theta$ en términos de $z = e^{i\theta}$. Ojo: no todos los polos son necesarios.

3. (2.5 pts) Considera la siguiente función:
$$F(s) = \frac{s+4}{s^2+2s-3}.$$
Utilizando el teorema del residuo, calcula la integral:
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{st}ds.$$

4. (2.5 pts) Sean $n, k \in \mathbb{N}$ de modo que $k < n$. Demuestra que:
$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}}dz.$$
Sugerencia. Utiliza el teorema del binomio.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. (+2 pts extra) Sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}\setminus\{0\}$ una sucesión de números complejos sin puntos de acumulación finitos tal que

$$0 < |a_1| < |a_2| < \cdots < |a_n| < \cdots ,$$

y f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos simples únicamente en $\{a_n\}$ tal que

$$\operatorname{Res}(f, a_n) = b_n.$$

Sea también $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de curvas cerradas simples (recorridas en sentido positivo) de modo que la región acotada por Γ_n contiene únicamente a $a_1, a_2, ..., a_n$ que además satisface:

a) $R_n = \operatorname{dist}(0, \Gamma_n) = \text{mín}\{|z| \ : \ z \in \Gamma_n\} \to \infty$ cuando $n \to \infty$,

b) $L_n \leq c_0 R_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, donde L_n es la longitud de Γ_n y $c_0 \in \mathbb{R}^+$,

c) Existe una $M > 0$ independiente de n tal que $|f(z)| < M$ para cualquier $z \in \Gamma_n$.

Demuestra que

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right).$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323