Variable Compleja I
Enunciados para reposiciones y examen final

Indicaciones

- Este es un examen de trabajo individual.
- Debes entregarlo mediante Moodle, con todas las indicaciones precisadas en la actividad correspondiente.
- Indica claramente en tus hojas que entregas si estás entregando examen final o reposición.
- Si presentas final, debes responder todas las preguntas.
- Si presentas reposición, recuerda que sólo puedes reponer una unidad. Deberás responder sólo las de la unidad correspondiente.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: http://www.mdistancia.com/comal/13.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Problemas

Unidad 1

1. (2.5 pts) Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1,\\
&\text{b)} \quad \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{6\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0.
\end{aligned}$$

2. (2.5 pts) Sean $n, m \in \mathbb{Z}$. Demuestra que $(\sqrt[n]{z})^m$ toma exactamente $n/(n,m)$ valores, donde (n,m) es el máximo común divisor de n y m.

3. (2.5 pts) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ donde $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Se define el *producto cruz* de z_1 y z_2 como:

   a) $z_1 \times z_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2$,

   b) $z_1 \times z_2 = |z_1||z_2| \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre z_1 y z_2,

   c) $z_1 \times z_2 = \operatorname{Im}[\overline{z_1} z_2]$,

   d) $z_1 \times z_2 = \frac{1}{2i}(\overline{z_1} z_2 - z_1 \overline{z_2})$.

   Demuestra que las definiciones a)-d) son equivalentes.

4. (2.5 pts) Considera los números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}_\infty$ dados por $z_1 = 7 + i77$ y $z_2 = 2 + i32$. Calcula:

   a) $\overline{2z_1 + i\overline{z_2}}$, b) $|2i\overline{z_1}z_2|^2$, c) $z_1 z_2^{-1}$,
   d) $\sqrt{z_1}$, e) $\varphi^{-1}(z_2)$.

   Donde $\varphi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{S}$ es la transformación inversa a la proyección estereográfica dada por:

$$\varphi^{-1}(z) = \begin{cases} (0,0,2), & \text{si } z = \infty, \\ \left(\frac{4a}{|z|^2+4}, \frac{4b}{|z|^2+4}, \frac{2|z|^2}{|z|^2+4}\right) & \text{si } z = a + ib \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 2

1. (2.5 pts) Sea $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en U, de modo que $|f^2(z) - 1| < 1$ para todo $z \in U$. Demuestra que $\mathrm{Re}[f(z)] > 0$ en todo U, o bien $\mathrm{Re}[f(z)] < 0$ en todo U.

2. (2.5 pts) Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}$ regiones y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en U con imagen V. Si $h(u, v)$ es una función armónica definida en V, demuestra que la función

$$H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y)),$$

es armónica en U.

3. (2.5 pts) Sea $a \in \mathbb{C}$. Demuestra que:

   a) $\overline{\operatorname{sen} a} = \operatorname{sen} \overline{a}$,

   b) $\overline{\cos a} = \cos \overline{a}$.

4. (2.5 pts) Determina en qué dominio es analítica la función $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = ze^{-z}$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 3

1. (2.5 pts) Determina si las series convergen uniformemente cuando $|z| < 1$.

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2} \qquad \text{y} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}} z^{n^2}.$$

2. (2.5 pts) Determina la región en la que convergen ambas series y escribe una forma cerrada para las funciones que representan.

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad \text{y} \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}.$$

   ¿Qué puedes decir de las formas cerradas calculadas? ¿En qué región convergen simultáneamente dichas series?

3. (2.5 pts) Considera una sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ tal que:

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| = r > 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \arg w_n = \varphi.$$

   Demuestra que:

$$\lim_{n\to\infty} w_n = re^{i\varphi},$$

   donde $\arg w$ es el argumento principal de w.

4. (2.5 pts) Calcula el siguiente límite utilizando representaciones en series de potencias:

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} z^2}{z^4} - \frac{\cos z}{z^2} \right).$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 4

1. (2.5 pts) Calcula la integral:

$$\int_\gamma \overline{z}^2 dz,$$

en cada uno de los siguientes casos:

   a) La curva γ es la circunferencia $|z| = 1$,

   b) La curva γ es la circunferencia $|z - 1| = 1$.

2. (2.5 pts) Sea $R > 0$ y γ la circunferencia de radio R centrada en 0 recorrida en el sentido contrario a las manecillas del reloj una sola vez. Calcula la integral:

$$\int_\gamma \frac{1 + \operatorname{sen} z}{z^4} dz.$$

3. (2.5 pts) Demuestra que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}.$$

Sugerencia. Plantea la integral como una función $F(b)$, y con ella determina una ecuación diferencial para ésta. Considera que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

4. (2.5 pts) Demuestra que una función analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en todo $\mathbb{C}$ que satisface $|f(z)| < |z|^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y $|z|$ suficientemente grande es un polinomio de grado menor o igual a n.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 5

1. (2.5 pts) Considera C como la circunferencia $|z| = r$. Calcula la integral:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \operatorname{sen}\frac{1}{z}dz.$$

   Sugerencia. ¿Cuál es la serie de Laurent del seno?

2. (2.5 pts) Sea $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una función armónica acotada en $\mathbb{C}$. Demuestra que u es constante.

Teorema (del módulo máximo). Sea $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en el interior de la región acotada por una curva cerrada simple C no constante, entonces el máximo de $|f|$ se alcanza sobre la curva C.

3. (2.5 pts) Sea f una función analítica en el anillo definido por $1 \leq |z| \leq 2$ de modo que $|f(z)| \leq 3$ para $|z| = 1$ y $|f(z)| \leq 12$ para $|z| = 2$. Demuestra que $|f(z)| \leq 3|z|^2$ para toda z en el anillo.

4. (2.5 pts) Calcula la integral:

$$\int_C f(z)dz,$$

   en los siguientes casos:

   a) C es la circunferencia con centro en $z_0 = 2i$ de radio $\frac{1}{2}$,
   b) C es la circunferencia con centro en $z_0 = 2i$ de radio $\frac{3}{2}$,
   c) C es la circunferencia con centro en $z_0 = 2i$ de radio $\frac{5}{2}$ y,
   d) C es la circunferencia con centro en $z_0 = 2i$ de radio $\frac{7}{2}$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Soluciones

Unidad 1

1. Partimos de las soluciones a la ecuación $z^n - 1 = 0$, es decir, de las raíces n-ésimas de la unidad, las cuales son:

$$\{1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, ..., e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}\}.$$

Utilizamos el hecho de que si $\{\omega^k\}_{k=0}^{n-1}$ son las raíces n-ésimas de la unidad, éstas satisfacen que:

$$\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0,$$

entonces, siguiendo esa identidad y la expresión en términos de seno y coseno de la exponencial se tiene que:

$$\begin{aligned}
&1 + e^{\frac{2\pi i}{n}} + e^{\frac{4\pi i}{n}} + \cdots + e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}} = 0,\\
\iff &1 + \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0,\\
\iff &\left[1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] + i\left[\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Igualando partes real e imaginaria, se concluye que:

$$1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Por la definición del máximo común divisor de n y m, se sabe que $(n,m)|n$ y $(n,m)|m$, así que existen $a, b \in \mathbb{Z}$ primos relativos tales que $n = (n,m)a$ y $m = (n,m)b$. Ahora, sea $z \in \mathbb{C}$ con forma polar $z = re^{i\theta}$, por la fórmula de De Moivre, las raíces n-ésimas de z están dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{i(\theta + 2\pi k)}{n}\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

La m-ésima potencia de cada una de estas n raíces a su vez es:

$$w_k^m = \left(\sqrt[n]{r}\right)^m \exp\left(\frac{im(\theta + 2\pi k)}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{r}\right)^m \exp\left(\frac{im\theta}{n}\right) \exp\left(2\pi i \frac{km}{n}\right).$$

Tomando $k = \frac{n}{(n,m)} = a$, se tiene que en el argumento de la segunda exponencial:

$$\frac{km}{n} = \frac{n}{(n,m)} \frac{m}{n} = \frac{m}{(n,m)} = b \in \mathbb{Z},$$

así, por la periodicidad de la exponencial, se sigue que

$$w_0^m = w_a^m,$$

de modo que $|\{w_k^m\}| \leq \frac{n}{(n,m)}$.
Suponiendo que $|\{w_k^m\}| < \frac{n}{(n,m)}$, entonces debe existir $k < \frac{n}{(n,m)}$ tal que

$$w_0^m = w_k^m,$$

lo que quiere decir, por un cálculo idéntico al primero, que

$$w_0^m = \left(\sqrt[n]{r}\right)^m \exp\left(\frac{im\theta}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{r}\right)^m \exp\left(\frac{im\theta}{n}\right) \exp\left(2\pi i \frac{km}{n}\right) = w_k^m.$$

Por lo tanto, se debería cumplir que:

$$\frac{km}{n} = p \in \mathbb{Z} \implies kb = pa \implies \left.\frac{n}{(n,m)}\right| k,$$

pero eso es imposible ya que $k < \frac{n}{(n,m)}$. Por la contradicción, se concluye que $|\{w_k^m\}| = \frac{n}{(n,m)}$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. $a) \iff c)]$ Partiendo de la definición c) y desarrollando el producto:

$$\overline{z_1}z_2 = (z_1 - iy_1)(z_2 + iy_2) = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Así, tomando la parte imaginaria de la expresión anterior, se tiene sencillamente que:

$$\mathrm{Im}[\overline{z_1}z_2] = x_1y_2 - x_2y_1.$$

$b) \iff c)]$ Sean $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$ las representaciones polares de z_1 y z_2, entonces por la manera en la que se multiplican complejos en forma polar, se tiene que:

$$\overline{z_1}z_2 = \overline{r_1e^{i\theta_1}}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_2-\theta_1)} = r_1r_2[\cos(\theta_2 - \theta_1) + i\,\mathrm{sen}(\theta_2 - \theta_1)].$$

Así, tomando la parte imaginaria de la expresión anterior, se tiene sencillamente que:

$$\mathrm{Im}[\overline{z_1}z_2] = r_1r_2\,\mathrm{sen}(\theta_2 - \theta_1) = |z_1||z_2|\,\mathrm{sen}(\theta_2 - \theta_1).$$

$b) \iff d)]$ En general, para un número complejo $w \in \mathbb{C}$ con representación $w = a + ib$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\mathrm{Im}[w] = b = \frac{w - \overline{w}}{2i}.$$

Entonces, considerando que el módulo es multiplicativo, se tiene que:

$$\mathrm{Im}[\overline{z_1}z_2] = \frac{\overline{z_1}z_2 - \overline{\overline{z_1}z_2}}{2i} = \frac{\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}}{2i}.$$

Como las definiciones a) y c) son equivalentes, y la definición c) es equivalente a las demás, por transitividad, todas son equivalentes.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Se utilizará la linealidad de la conjugación y la multiplicidad del módulo:

a) Sustituyendo los valores de z_1 y z_2:

$$\begin{aligned}\overline{2z_1 + i\overline{z_2}} &= \overline{2(7+i77) + i\overline{(2+i32)}} = \overline{14 + i154 + i(2-i32)} \\ &= \overline{14 + i154 + i2 + 32} = \overline{46 + i156} = 46 - i156.\end{aligned}$$

b) Por la multiplicidad del módulo y que $|w| = |\overline{w}|$ para cualquier $w \in \mathbb{C}$, se tiene primeramente:

$$|2i\overline{z_1}z_2|^2 = (|2||i||\overline{z_1}||z_2|)^2 = (2|z_1||z_2|)^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2.$$

Para calcular el cuadrado de los módulos, se tiene en general que si $w = a + ib$, entonces:

$$|w|^2 = w\overline{w} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2,$$

así, para cada uno de los números:

$$\begin{aligned}|z_1|^2 &= 7^2 + 77^2 = 49 + 5929 = 5978, \\ |z_2|^2 &= 2^2 + 32^2 = 4 + 1024 = 1028.\end{aligned}$$

Sustituyendo, se tiene finalmente que el valor numérico es:

$$|2i\overline{z_1}z_2|^2 = 4|z_1|^2|z_2|^2 = 4(5978)(1028) = 24940.$$

c) Primero, es posible reexpresar el número complejo como:

$$z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Utilizando uno de los valores calculados en el inciso anterior, se puede dar un valor como:

$$\begin{aligned}z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} &= \frac{1}{|z_2|^2}(7+i77)(2-i32) \\ &= \frac{1}{|z_2|^2}(14 - i224 + i154 + 2464) \\ &= \frac{1}{1028}(2478 - i70) = \frac{1239}{514} - i\frac{35}{514}.\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

d) Se busca $w \in \mathbb{C}$ tal que $w^2 = z_1$. Si $w = a + ib$, por igualdad de números complejos, la condición anterior se traduce en el sistema de ecuaciones:

$$w^2 = z_1 \iff (a^2 - b^2) + i(2ab) = z_1 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 7, \\ 2ab = 77. \end{cases}$$

A partir de este sistema de ecuaciones, es posible despejar a y b, de modo que:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a^2 - b^2 = 7, \\ 2ab = 77, \end{cases} \quad &\iff \begin{cases} a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = 49, \\ 4a^2b^2 = 5929, \end{cases} \\ &\implies a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 5978, \\ &\implies (a^2 + b^2)^2 = 5978, \\ &\implies a^2 + b^2 = \sqrt{5978}. \end{aligned}$$

Sumando la primera ecuación del sistema con esta última condición, se tiene que:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 7, \\ a^2 + b^2 = \sqrt{5978}, \end{cases} \implies 2a^2 = \sqrt{5978} + 7 \implies a = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5978} + 7}{2}}.$$

Sustituyendo en la segunda ecuación del sistema original, se tiene finalmente que:

$$\begin{cases} a = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5978}+7}{2}}, \\ 2ab = 77. \end{cases} \implies b = \pm\frac{77}{2\sqrt{\frac{\sqrt{5978}+7}{2}}}.$$

Entonces $w_+ = a_+ + ib_+$ y $w_- = a_- + ib_-$ son las raíces cuadradas de z_1.

e) Para esto, basta sustituir los valores calculados en b), de modo que:

$$\varphi^{-1}(z_2) = \left(\frac{2}{1032}, \frac{64}{1032}, \frac{2056}{1032}\right) = \left(\frac{1}{516}, \frac{8}{129}, \frac{257}{129}\right).$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 2

1. Para demostrar esto, se probará la afirmación contrapuesta a la buscada, la cual es equivalente lógica de la original, es decir, se probará que si $\text{Re}[f(z)] = 0$ para alguna $z \in U$, entonces $|f^2(z) - 1| \geq 1$ para alguna $z \in U$.
   Teniendo esto en cuenta, sea $z \in U$ tal que se cumple la hipótesis, escribiendo a $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, por hipótesis se tiene que $u(x, y) = 0$ para dicho $z = x + iy$, de modo que el módulo a calcular se reduce a:

   $$|f^2(z) - 1| = |(0 + iv(x, y))^2 - 1| = | - v^2(x, y) - 1| = |v^2(x, y) + 1| \geq 1,$$

   donde la última desigualdad se da de que $v(x, y) \in \mathbb{R}$, de modo que $v^2(x, y) \geq 0$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Para esto debemos verificar que el laplaciano de la función sea 0, recordando que éste se define como:

$$\Delta H = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$$

Al ser $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ analítica, satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Para calcular las primeras derivadas de H, se puede utilizar la regla de la cadena, de modo que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \overset{\text{C-R}}{=} \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}, \\
\frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \overset{\text{C-R}}{=} -\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial x},
\end{aligned}$$

donde se utilizaron las ecuaciones de Cauchy-Riemann para las últimas igualdades. Para las derivadas de segundo orden se pueden utilizar la regla de la cadena y la regla del producto, además, al ser funciones analíticas, son de clase $\mathcal{C}^2$, por lo que el orden en que se toman las derivadas parciales no es relevante, así:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right] \\
&= \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right] \\
&= \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Antes de sumar los resultados anteriores, es útil notar que al multiplicar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se tiene la identidad entre derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Finalmente, sumando las derivadas de segundo orden y por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, el laplaciano de H es:

$$\begin{aligned}
\Delta H &= \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\
&= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}\right] = |f'(z)|^2 \Delta h = 0,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó que h es armónica, es decir, que $\Delta h = 0$. Por lo tanto, al ser $\Delta H = 0$, la función H también es armónica.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. Sea $a \in \mathbb{C}$ dado por $a = a_1 + ia_2$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Notemos que, para cualquier $y \in \mathbb{R}$:

$$\overline{e^{iy}} = \overline{\cos y + i \operatorname{sen} y} = \cos y - i \operatorname{sen} y = \cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y) = e^{-iy}.$$

a) Partiendo de la definición del seno de un número complejo $z_0 \in \mathbb{C}$ en términos de la exponencial:

$$\operatorname{sen} z_0 = \frac{e^{iz_0} - e^{-iz_0}}{2i},$$

se tiene que al tomar el conjugado:

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{sen} a} &= \overline{\left(\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\right)} = \frac{\overline{e^{ia} - e^{-ia}}}{\overline{2i}} = \frac{\overline{e^{ia}} - \overline{e^{-ia}}}{-2i} \\
&= -\frac{\overline{e^{i(a_1+ia_2)}} - \overline{e^{-i(a_1+ia_2)}}}{2i} = -\frac{\overline{e^{ia_1}e^{-a_2}} - \overline{e^{-ia_1}e^{a_2}}}{2i} \\
&= -\frac{\overline{e^{ia_1}}\,\overline{e^{-a_2}} - \overline{e^{-ia_1}}\,\overline{e^{a_2}}}{2i} = \frac{e^{ia_1}e^{a_2} - e^{-ia_1}e^{-a_2}}{2i} \\
&= \frac{e^{ia_1+a_2} - e^{-ia_1-a_2}}{2i} = \frac{e^{i(a_1-ia_2)} - e^{-i(a_1-ia_2)}}{2i} \\
&= \frac{e^{i\overline{a}} - e^{-i\overline{a}}}{2i} = \operatorname{sen} \overline{a}.
\end{aligned}$$

b) De manera idéntica, partiendo de la definición del coseno de un número complejo $z_0 \in \mathbb{C}$ en términos de la exponencial:

$$\cos z_0 = \frac{e^{iz_0} + e^{-iz_0}}{2},$$

se tiene que al tomar el conjugado:

$$\begin{aligned}
\overline{\cos a} &= \overline{\left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right)} = \frac{\overline{e^{ia} + e^{-ia}}}{2} = \frac{\overline{e^{ia}} + \overline{e^{-ia}}}{2} \\
&= \frac{\overline{e^{i(a_1+ia_2)}} + \overline{e^{-i(a_1+ia_2)}}}{2} = \frac{\overline{e^{ia_1}e^{-a_2}} + \overline{e^{-ia_1}e^{a_2}}}{2} \\
&= \frac{\overline{e^{ia_1}}\,\overline{e^{-a_2}} + \overline{e^{-ia_1}}\,\overline{e^{a_2}}}{2} = \frac{e^{ia_1}e^{a_2} + e^{-ia_1}e^{-a_2}}{2} \\
&= \frac{e^{ia_1+a_2} + e^{-ia_1-a_2}}{2} = \frac{e^{i(a_1-ia_2)} + e^{-i(a_1-ia_2)}}{2} \\
&= \frac{e^{i\overline{a}} + e^{-i\overline{a}}}{2} = \cos \overline{a}.
\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Para esto, se determinará en qué región se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces primero es necesario reescribir a f como su parte real e imaginaria, es decir, hallar u y v tales que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$, donde $x, y \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} f(z) = ze^{-z} &= (x+iy)e^{-(x+iy)} = (x+iy)e^{-x}e^{-iy} \\ &= e^{-x}(x+iy)(\cos y - i \operatorname{sen} y) \\ &= e^{-x}(x\cos y - ix \operatorname{sen} y + iy\cos y - y \operatorname{sen} y) \\ &= e^{-x}(x\cos y - y\operatorname{sen} y) + ie^{-x}(y\cos y - x\operatorname{sen} y), \end{aligned}$$

de modo que las funciones buscadas son $u, v : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por $u(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\operatorname{sen} y)$ y $v(x,y) = e^{-x}(y\cos y - x\operatorname{sen} y)$. Las derivadas parciales de primer orden de estas funciones son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -e^{-x}(x\cos y + y\operatorname{sen} y - \cos y), & \frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{-x}(x\operatorname{sen} y - y\cos y - \operatorname{sen} y), \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -e^{-x}(y\cos y + \operatorname{sen} y - x\operatorname{sen} y), & \frac{\partial v}{\partial y} &= -e^{-x}(y\operatorname{sen} y + x\cos y - \cos y). \end{aligned}$$

Entonces la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ será analítica en la región en la que se satisfaga que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Revisando la primera ecuación:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \iff\ & -e^{-x}(x\cos y + y\operatorname{sen} y - \cos y) = -e^{-x}(y\operatorname{sen} y + x\cos y - \cos y), \end{aligned}$$

la cual se cumple para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, así que se cumple la primera ecuación. Revisando la segunda ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \\ \iff\ & -e^{-x}(x\operatorname{sen} y - y\cos y - \operatorname{sen} y) = -e^{-x}(-y\cos y - \operatorname{sen} y + x\operatorname{sen} y), \end{aligned}$$

la cual se cumple para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, así que se cumple la segunda ecuación.
Al satisfacerse las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo $\mathbb{C}$, se concluye que f es analítica en todo $\mathbb{C}$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 3

1. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$.

   a) Tomando el módulo de cada término de la serie se tiene que:

   $$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z^n|}{|n^2|} = \frac{|z|^n}{n^2} < \frac{1}{n^2},$$

   entonces, en particular la serie completa es tal que:

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

   De la última serie se sabe que converge, específicamente:

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

   Considerando la sucesión $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, la cual acota superiormente a la sucesión de módulos de la serie original y converger su propia serie, por el criterio M de Weierstrass, se concluye que la serie original converge uniformemente cuando $|z| < 1$.

   b) Tomando el módulo de cada término de la serie se tiene que:

   $$\left|\frac{n}{2^{n^2}}z^{n^2}\right| = \left|\frac{n}{2^{n^2}}\right|\left|z^{n^2}\right| = \frac{n}{2^{n^2}}|z|^{n^2} < \frac{n}{2^{n^2}},$$

   entonces, en particular la serie completa es tal que:

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n}{2^{n^2}}z^{n^2}\right| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n^2}}.$$

   Para estudiar la convergencia de la última serie, utilizando el criterio de la razón se sigue que, para la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{n}{2^{n^2}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$:

   $$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{n}{2^{n^2}}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{n^2}}{n2^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2^{2n+1}} = 0, \end{aligned}$$

   y como $L = 0 < 1$, la serie de términos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, y por ende, por el criterio M de Weierstrass, se concluye que la serie original converge uniformemente cuando $|z| < 1$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Para ambas series se utilizará el criterio de la razón.

   a) Utilizando el criterio de la razón para la sucesión de sumandos $\left\{\frac{z^n}{2^{n+1}}\right\}$, se tiene que la serie converge cuando:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \iff \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{z^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{z^n}{2^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z}{2}\right|=\left|\frac{z}{2}\right|,$$

   de la última desigualdad se concluye que la serie converge cuando $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ o, equivalentemente, cuando $|z|<2$. Para la forma cerrada, es posible obtener una serie geométrica, de modo que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{1}{2-z}.$$

   b) De manera idéntica al inciso anterior, utilizando el criterio de la razón para la sucesión de sumandos $\left\{\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}\right\}$, se tiene que la serie converge cuando:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \iff \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(z-i)^{n+1}}{(2-i)^{n+2}}}{\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z-i}{2-i}\right|=\left|\frac{z-i}{2-i}\right|,$$

   de la última desigualdad se concluye que la serie converge cuando $\left|\frac{z-i}{2-i}\right|<1$, o equivalentemente, cuando $|z-i|<|2-i|=\sqrt{5}$. Para la forma cerrada, es posible obtener una serie geométrica, de modo que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}=\frac{1}{2-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{2-i}\right)^n=\frac{1}{2-i}\frac{1}{1-\frac{z-i}{2-i}}=\frac{1}{2-z}.$$

Se puede observar que la forma cerrada es la misma aunque para distintas regiones de convergencia: la primera converge en el disco $|z|<1$ y la segunda en el disco $|z-i|<\sqrt{5}$; por la misma razón, convergen simultáneamente en la intersección de ambos discos.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. Tomando cada término de la sucesión como su descomposición en parte real e imaginaria $w_n = u_n + iv_n$, de modo que:

$$\begin{aligned} u_n &= \mathrm{Re}[w_n] = |w_n| \cos(\arg(w_n)), \\ v_n &= \mathrm{Im}[w_n] = |w_n| \operatorname{sen}(\arg(w_n)). \end{aligned}$$

Entonces, por la continuidad del seno y del coseno (reales) se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} [|w_n| \cos(\arg(w_n))] \\ &= \left[\lim_{n\to\infty} |w_n|\right] \cos\left(\lim_{n\to\infty} \arg(w_n)\right) = r\cos\varphi, \\ \lim_{n\to\infty} v_n &= \lim_{n\to\infty} [|w_n| \operatorname{sen}(\arg(w_n))] \\ &= \left[\lim_{n\to\infty} |w_n|\right] \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} \arg(w_n)\right) = r\operatorname{sen}\varphi. \end{aligned}$$

Así, como una sucesión de números complejos converge si sus sucesiones de parte real e imaginaria convergen, se concluye que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} w_n &= \lim_{n\to\infty} (u_n + iv_n) = \lim_{n\to\infty} u_n + i \lim_{n\to\infty} v_n \\ &= r\cos\varphi + ir\operatorname{sen}\varphi = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi) = re^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Las series de Taylor de seno y coseno son:

$$\operatorname{sen} w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1} = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} - \frac{w^7}{7!} + \cdots \,,$$
$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n} = 1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \cdots \,.$$

Ahora, la función a la que se quiere calcular el límite se puede reescribir como:

$$\frac{\sin z^2}{z^4} - \frac{\cos z}{z^2} = \frac{\sin z^2 - z^2 \cos z}{z^4},$$

entonces, a partir de las series de potencias conocidas, componiendo con z^2 y multiplicando por z^2:

$$\sin z^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z^2)^{2n+1} = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \frac{z^{14}}{7!} + \cdots \,,$$
$$z^2 \cos z = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = z^2 - \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{4!} - \frac{z^8}{6!} + \cdots \,,$$
$$\implies \sin z^2 - z^2 \cos z = \frac{z^4}{2} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) z^6 - \frac{z^8}{8!} + \cdots \,,$$
$$\implies \frac{\sin z^2 - z^2 \cos z}{z^4} = \frac{1}{2} - \frac{5}{24} z^2 - \frac{z^4}{8!} + \cdots \,.$$

Tomando el límite de lo anterior:

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{\sin z^2 - z^2 \cos z}{z^4}\right) = \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{24} z^2 - \frac{z^4}{8!} + \cdots\right) = \frac{1}{2}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 4

1. Recordando que si $\sigma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una parametrización de una curva en $\mathbb{C}$, la integral de una función f a lo largo de σ se define como:

$$\int_\sigma f(z)dz = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt.$$

Considerando esto:

a) La circunferencia de radio 1 se puede parametrizar como $\gamma : [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{it}$ (así que $\gamma'(t) = ie^{it}$). Sustituyendo en la expresión para la integral a lo largo de la trayectoria:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}^2 dz &= \int_0^{2\pi} (\overline{e^{it}})^2 ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{-2it}e^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{-it}dt \\ &= i\left[\int_0^{2\pi} \cos t dt - i\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t dt\right] = 0.\end{aligned}$$

b) La circunferencia de radio 1 centrada en 1 se puede parametrizar como $\gamma : [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ (así que $\gamma'(t) = ie^{it}$). Sustituyendo en la expresión para la integral a lo largo de la trayectoria:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overline{z}^2 dz &= \int_0^{2\pi} (\overline{e^{it}+1})^2 ie^{it}dt = i\int_0^{2\pi} (e^{-it}+1)^2 e^{it}dt \\ &= i\int_0^{2\pi} (e^{-2it} + 2e^{-it} + 1)e^{it}dt \\ &= i\left[\int_0^{2\pi} e^{-it}dt + \int_0^{2\pi} 2dt + \int_0^{2\pi} e^{it}dt\right] = 4\pi i.\end{aligned}$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Como la función $f(z) = 1 + \operatorname{sen} z$ es analítica, ya que $\operatorname{sen} z$ lo es, por la fórmula integral de Cauchy para la n-ésima derivada, el valor de la integral se puede calcular como:

$$\int_\gamma \frac{1+\operatorname{sen} z}{z^4}dz = \int_\gamma \frac{1+\operatorname{sen} z}{(z-0)^{3+1}}dz = \frac{2\pi i}{3!}n(\gamma,0)f^{(3)}(0).$$

Como por hipótesis la circunferencia sólo se recorre una vez y el 0 sí está contenido en la región acotada por la circunferencia, el valor de $n(\gamma, 0) = 1$. Para la tercera derivada de f, utilizando las reglas de derivación para las funciones trigonométricas, se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{d^3 f}{dz^3}(z) &= \frac{d^3}{dz^3}(\operatorname{sen} z + 1) = \frac{d^2}{dz^2}(\cos z)\\ &= \frac{d}{dz}(-\operatorname{sen} z) = -\cos z.\end{aligned}$$

Sustituyendo esto en la expresión encontrada para la integral, se concluye que:

$$\int_\gamma \frac{1+\operatorname{sen} z}{z^4}dz = \frac{2\pi i}{3!}n(\gamma,0)(-\cos 0) = -\frac{2\pi i}{6} = -\frac{\pi}{3}i.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. Definiendo a la función F como:

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2tx)dx,$$

en particular, por hipótesis y paridad de x^2, se sabe que:

$$F(0) = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ahora, el integrando dado por la función $g(t,x) = e^{-x^2}\cos(2tx)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$, en particular es de clase $\mathcal{C}^1$ en t, con primera derivada parcial respecto a t dada por:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-x^2}\cos(2tx)\right) = -2xe^{-x^2}\operatorname{sen}(2tx).$$

Entonces, de nuevo por ser g de clase $\mathcal{C}^1$ en t, es posible aplicar la regla de derivación bajo el signo de la integral, de modo que la derivada de F es:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2tx)dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-x^2}\cos(2tx)\right)dx \\ &= -\int_0^\infty 2xe^{-x^2}\operatorname{sen}(2tx)dx. \end{aligned}$$

Desarrollando esta última integral por el método de integración por partes se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned} F'(t) &= -\int_0^\infty 2xe^{-x^2}\operatorname{sen}(2tx)dx \\ &= \left[e^{-x^2}\operatorname{sen}(2tx)\Big|_{x=0}^{x\to\infty}\right] - 2t\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2tx)dx \\ &= -2t\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2tx)dx = -2tF(t). \end{aligned}$$

Al ser una ecuación diferencial de primer orden separable, se sabe que su solución se puede obtener con:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} = -2tF \iff \frac{1}{F}\frac{dF}{dt} = -2t \\ \iff \ln|F| = -t^2 + c_1 \iff F(t) = C_2e^{-t^2}. \end{aligned}$$

Para obtener el valor de C_2, se puede utilizar la condición inicial de $F(0)$, así:

$$F(0) = C_2e^0 = C_2 \implies C_2 = F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Sustituyendo el valor de C_2 y evaluando en $t = b$ se concluye que:

$$F(b) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2tx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Para probar esto, es importante considerar el siguiente lema:
Lema. Sea $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que existe su $(n+1)$-ésima derivada y además ésta es 0 en U. Entonces f es un polinomio de grado menor o igual a n.
Demostración. Procediendo por inducción.

   CB $n = 0$. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analítica en U tal que $f'(z) = 0$, en particular se tiene que:

$$f'(z) = 0 \implies f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z) = 0,$$

   que igualando partes real e imaginaria, se concluye que u y v son constantes, de modo que f es constante.

   PI Suponiendo que la afirmación es válida para $n-1$, es decir, que si $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función analítica tal que existe su n-ésima derivada y además ésta es 0 en U, entonces f es un polinomio de grado menor o igual a $n-1$. Sea f analítica en U tal que $f^{(n+1)}(z) = 0$. Como f es analítica, su primera derivada f' también lo es, además ésta es tal que $f'^{(n)} = 0$, entonces, por hipótesis de inducción:

$$f'^{(n)}(z) = 0 \implies f'(z) = a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

   para algunos $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Integrando la expresión anterior se tiene que:

$$f(z) - f(z_0) = \int_{z_0}^{z} f'(w)dw = \frac{a_{n-1}}{n}z^n + \frac{a_{n-2}}{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z^2 + a_0 z,$$

   es decir, f es un polinomio de grado menor o igual a n.

Por el principio de inducción, la afirmación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.
Para probar la afirmación, por hipótesis existen $r_0 > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $|f(z)| < |z|^n$ para $|z| > r_0$. Entonces, para $z_0 \in \mathbb{C}$ y γ la circunferencia de radio R con centro en z_0, por la fórmula integral de Cauchy para la n-ésima derivada se tiene que:

$$f^{(n+1)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}}dz.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Tomando $R > r_0 + |z_0|$ y $|z - z_0| = R$, se puede acotar el módulo de lo anterior como:

$$
\begin{aligned}
|f^{(n+1)}(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+2}} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+2}} |dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|z|^n}{|z-z_0|^{n+2}} |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{(R+|z_0|)^n}{R^{n+2}} 2\pi R \\
&= \frac{(R+|z_0|)^n}{R^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

Tomando el límite cuando $R \to \infty$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} |f^{(n+1)}(z_0)| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{(R+|z_0|)^n}{R^{n+1}} = 0 \\
\implies f^{(n+1)}(z_0) = 0,
\end{aligned}
$$

entonces, como $z_0 \in \mathbb{C}$ fue arbitraria, por el lema se concluye que f es un polinomio de grado menor o igual a n.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 5

1. Siguiendo la sugerencia, recordando que la serie de Laurent alrededor de $w = 0$ del seno es:

$$\operatorname{sen} w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}.$$

Entonces, componiendo con la función $f(z) = \frac{1}{z}$, la serie de Laurent del integrando es

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! z^{2n+1}}.$$

Así, al ser $z = 0$ una singularidad esencial de la función, por el teorema del residuo se concluye que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = \operatorname{Res}\left(\operatorname{sen} \frac{1}{z}, 0\right) = u_{-1} = 1.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Como u es armónica en un dominio conexo, existe una función analítica f en $\mathbb{C}$, es decir, entera, tal que

$$u = \mathrm{Re}[f].$$

También, al ser u acotada, existe $M > 0$ tal que $|u(z)| \leq M$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$. Entonces el módulo de e^f se puede acotar como

$$\begin{aligned} \left|e^{f(z)}\right| &= \left|e^{u(x,y)+iv(x,y)}\right| = \left|e^{u(x,y)}\right|\left|e^{iv(x,y)}\right| \\ &= \left|e^{u(x,y)}\right| = e^{u(x,y)} \leq e^{|u(x,y)|} \leq e^M. \end{aligned}$$

Así, como la exponencial compleja es una función entera y f también es entera, su composición e^f es entera. Al ser e^f una función entera y acotada, por el teorema de Liouville se sigue que es constante, es decir

$$e^{f(z)} = w_0,$$

para algún $w_0 \in \mathbb{C}$. Derivando la expresión anterior y utilizando que la exponencial no se anula, se tiene para $z \in \mathbb{C}$:

$$\left(e^{f(z)}\right)' = f'(z)e^{f(z)} = 0 \implies f'(z) = 0.$$

Al ser f de derivada 0 en todo $\mathbb{C}$, se sabe que f es una función constante, por lo que se concluye que:

$$f(z) = z_0 = z_{0,1} + iz_{0,2} \implies u(x,y) = \mathrm{Re}[f(z)] = z_{0,1}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. Primero hay que notar que la frontera del anillo son las dos circunferencias definidas por $|z| = 1$ y $|z| = 2$, en particular, en esta frontera se cumple por hipótesis que:

$$|z| = 1 \implies |f(z)| \leq 3 \iff \frac{|f(z)|}{3} \leq 1$$

$$\text{y} \qquad |z| = 2 \implies |f(z)| \leq 12 \iff \frac{|f(z)|}{12} \leq 1.$$

Sea g definida por $g(z) = \frac{f(z)}{3z^2}$, la cual es analítica en el anillo, particularmente en su interior, además:

$$|z| = 1 \implies |g(z)| = \left|\frac{f(z)}{3z^2}\right| = \frac{|f(z)|}{3|z|^2} = \frac{|f(z)|}{3} \leq 1,$$
$$|z| = 2 \implies |g(z)| = \left|\frac{f(z)}{3z^2}\right| = \frac{|f(z)|}{3|z|^2} = \frac{|f(z)|}{12} \leq 1.$$

Entonces el módulo $|g(z)|$ está acotado por 1 en la frontera del anillo, así por el principio del módulo máximo, para cualquier z en el anillo:

$$|g(z)| \leq 1 \iff |f(z)| \leq 3|z|^2.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Los polos de la función $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$ son:

$$z(z^2+1) = 0 \iff \begin{cases} z = 0, \\ z^2 + 1 = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0, \\ z = i, \\ z = -i. \end{cases}$$

Y los residuos en cada uno de estos polos simples son:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f,0) &= \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^2+1} = 1, \\ \operatorname{Res}(f,i) &= \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{z(z+i)} = -\frac{1}{2}, \\ \operatorname{Res}(f,-i) &= \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{1}{z(z-i)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta lo anterior:

a) En la región acotada por C, f es analítica, por lo que:

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

b) La región acotada por C sólo contiene al polo en $z = i$, entonces por el teorema del residuo:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = -\pi i.$$

c) La región acotada por C contiene a los polos en $z = i, 0$, entonces por el teorema del residuo:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i[\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,0)] = \pi i.$$

c) La región acotada por C contiene todos los polos en $z = i, 0, -1$, entonces por el teorema del residuo:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i[\operatorname{Res}(f,i) + \operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,-i)] = 0.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323