Variable Compleja I
Enunciados para reposiciones y examen final

Indicaciones

- Este es un examen de trabajo individual.
- Debes entregarlo mediante Moodle, con todas las indicaciones precisadas en la actividad correspondiente.
- Indica claramente en tus hojas que entregas si estás entregando examen final o reposición.
- Si presentas final, debes responder todas las preguntas.
- Si presentas reposición, recuerda que sólo puedes reponer una unidad. Deberás responder sólo las de la unidad correspondiente.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: http://www.mdistancia.com/comal/13.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Problemas

Unidad 1

1. (2.5 pts) Sea $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que:

$$\begin{aligned} \text{a)}\quad & \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \cdots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = -1, \\ \text{b)}\quad & \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{6\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0. \end{aligned}$$

2. (2.5 pts) Sean $n, m \in \mathbb{Z}$. Demuestra que $(\sqrt[n]{z})^m$ toma exactamente $n/(n,m)$ valores, donde (n,m) es el máximo común divisor de n y m.

3. (2.5 pts) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ donde $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Se define el *producto cruz* de z_1 y z_2 como:

   a) $z_1 \times z_2 = x_1y_2 - y_1x_2$,
   b) $z_1 \times z_2 = |z_1||z_2| \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre z_1 y z_2,
   c) $z_1 \times z_2 = \operatorname{Im}[\overline{z_1}z_2]$,
   d) $z_1 \times z_2 = \frac{1}{2i}(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2})$.

   Demuestra que las definiciones a)-d) son equivalentes.

4. (2.5 pts) Considera los números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}_\infty$ dados por $z_1 = 7 + i77$ y $z_2 = 2 + i32$. Calcula:

   a) $\overline{2z_1 + i\overline{z_2}}$, b) $|2i\overline{z_1}z_2|^2$, c) $z_1z_2^{-1}$,
   d) $\sqrt{z_1}$, e) $\varphi^{-1}(z_2)$.

   Donde $\varphi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{S}$ es la transformación inversa a la proyección estereográfica dada por:

$$\varphi^{-1}(z) = \begin{cases} (0,0,2), & \text{si } z = \infty, \\ \left(\frac{4a}{|z|^2+4}, \frac{4b}{|z|^2+4}, \frac{2|z|^2}{|z|^2+4}\right) & \text{si } z = a + ib \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 2

1. (2.5 pts) Sea $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en U, de modo que $|f^2(z) - 1| < 1$ para todo $z \in U$. Demuestra que $\text{Re}[f(z)] > 0$ en todo U, o bien $\text{Re}[f(z)] < 0$ en todo U.

2. (2.5 pts) Sean $U, V \subseteq \mathbb{C}$ regiones y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en U con imagen V. Si $h(u, v)$ es una función armónica definida en V, demuestra que la función

$$H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y)),$$

es armónica en U.

3. (2.5 pts) Sea $a \in \mathbb{C}$. Demuestra que:

   a) $\overline{\operatorname{sen} a} = \operatorname{sen} \overline{a}$,

   b) $\overline{\cos a} = \cos \overline{a}$.

4. (2.5 pts) Determina en qué dominio es analítica la función $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = ze^{-z}$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 3

1. (2.5 pts) Determina si las series convergen uniformemente cuando $|z| < 1$.
$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{n^2} \qquad \text{y} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}} z^{n^2}.$$

2. (2.5 pts) Determina la región en la que convergen ambas series y escribe una forma cerrada para las funciones que representan.
$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad \text{y} \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}.$$
¿Qué puedes decir de las formas cerradas calculadas? ¿En qué región convergen simultáneamente dichas series?

3. (2.5 pts) Considera una sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ tal que:
$$\lim_{n\to\infty} |w_n| = r > 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \arg w_n = \varphi.$$
Demuestra que:
$$\lim_{n\to\infty} w_n = re^{i\varphi},$$
donde $\arg w$ es el argumento principal de w.

4. (2.5 pts) Calcula el siguiente límite utilizando representaciones en series de potencias:
$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} z^2}{z^4} - \frac{\cos z}{z^2} \right).$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 4

1. (2.5 pts) Calcula la integral:

$$\int_\gamma \overline{z}^2 dz,$$

en cada uno de los siguientes casos:

   a) La curva γ es la circunferencia $|z| = 1$,

   b) La curva γ es la circunferencia $|z-1| = 1$.

2. (2.5 pts) Sea $R > 0$ y γ la circunferencia de radio R centrada en 0 recorrida en el sentido contrario a las manecillas del reloj una sola vez. Calcula la integral:

$$\int_\gamma \frac{1+\operatorname{sen} z}{z^4} dz.$$

3. (2.5 pts) Demuestra que:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}.$$

Sugerencia. Plantea la integral como una función $F(b)$, y con ella determina una ecuación diferencial para ésta. Considera que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

4. (2.5 pts) Demuestra que una función analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en todo $\mathbb{C}$ que satisface $|f(z)| < |z|^n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ y $|z|$ suficientemente grande es un polinomio de grado menor o igual a n.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Unidad 5

1. (2.5 pts) Considera C como la circunferencia $|z| = r$. Calcula la integral:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \operatorname{sen}\frac{1}{z}dz.$$

   Sugerencia. ¿Cuál es la serie de Laurent del seno?

2. (2.5 pts) Sea $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una función armónica acotada en $\mathbb{C}$. Demuestra que u es constante.

Teorema (del módulo máximo). Sea $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en el interior de la región acotada por una curva cerrada simple C no constante, entonces el máximo de $|f|$ se alcanza sobre la curva C.

3. (2.5 pts) Sea f una función analítica en el anillo definido por $1 \leq |z| \leq 2$ de modo que $|f(z)| \leq 3$ para $|z| = 1$ y $|f(z)| \leq 12$ para $|z| = 2$. Demuestra que $|f(z)| \leq 3|z|^2$ para toda z en el anillo.

4. (2.5 pts) Calcula la integral:

$$\int_C f(z)dz,$$

   en los siguientes casos:

   a) C es la circunferencia con centro en $z_0 = 2i$ de radio $\frac{1}{2}$,
   b) C es la circunferencia con centro en $z_0 = 2i$ de radio $\frac{3}{2}$,
   c) C es la circunferencia con centro en $z_0 = 2i$ de radio $\frac{5}{2}$ y,
   d) C es la circunferencia con centro en $z_0 = 2i$ de radio $\frac{7}{2}$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323