Variable Compleja I
Unidad 1: Tarea en equipo con soluciones

Problemas

1. Demuestre las siguientes desigualdades.

   a) Para $z, w \in \mathbb{C}$, se cumple que $||z| - |w|| \leq |z - w|$,

   b) Utilizando argumentos geométricos, para todo $z \in \mathbb{C}$,

   $$|z - 1| \leq ||z| - 1| + |z||\arg(z)|,$$

   c) Para $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a|, |b| < 1$,

   $$\left|\frac{a - b}{1 - \overline{a}b}\right| < 1.$$

2. Utilizando la identidad

   $$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

   demuestre la identidad trigonométrica de Lagrange:

   $$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

3. Demuestre que tres números complejos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ son los vértices de un triángulo equilátero si y sólo si satisfacen que

   $$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

4. Demuestre que dos números complejos $z, w \in \mathbb{C}$ tienen imágenes diametralmente opuestas en la esfera de Riemann bajo la proyección estereográfica si y sólo si $z\overline{w} = -1$.

5. Sea $\{C_1, ..., C_n\} \subseteq \mathbb{C}$ una familia de subconjuntos poligonal-conexos. Suponiendo que éstos cumplen

   $$C_1 \cap C_2 \neq \varnothing, \quad C_2 \cap C_3 \neq \varnothing, \quad \cdots, C_{n-1} \cap C_n \neq \varnothing$$

   Demuestra que $\bigcup_{j=1}^{n} C_j$ es poligonal-conexo.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Soluciones

1. Para demostrar las tres desigualdades, es útil tener presentes todas las definiciones y resultados sobre el módulo de un número complejo expuestas en la entrada de blog del curso: *El Plano Complejo* $\mathbb{C}$ `https://blog.nekomath.com/variable-compleja-i-el-plano-complejo/`.

   a) Recordando que, en general, para $u, v \in \mathbb{C}$, el módulo satisface que

   $$|uv| = |u||v|$$

   Se sigue inmediatamente que

   $$|z-w| = |(-1)(w-z)| = |-1||w-z| = |w-z| \tag{1}$$

   esto prueba la propiedad de simetría de una métrica. El carácter como métrica del módulo se discute con más cuidado en la entrada de blog del curso: *Topología de* $\mathbb{C}$. También es conveniente tener presente que para cualesquiera $u, v \in \mathbb{C}$, se tiene la *Desigualdad del Triángulo*

   $$|u+v| \leq |u| + |v| \tag{2}$$

   Entonces, para $z, w \in \mathbb{C}$, utilizando primero (2) se tiene que:

   $$\begin{aligned} |z| &= |z-w+w| = |(z-w)+w| \\ &\leq |z-w| + |w| \\ &\implies |z| - |w| \leq |z-w| \end{aligned} \tag{3}$$

   Resaltando que en la segunda igualdad se utilizó que al ser $\mathbb{C}$ un campo, su suma cumple el ser asociativa. Siguiendo el mismo procedimiento con el módulo de w:

   $$\begin{aligned} |w| &= |w-z+z| = |(w-z)+z| \\ &\leq |w-z| + |z| \\ &\implies |w| - |z| \leq |w-z| \\ &\iff -(|z|-|w|) \leq |z-w| \\ &\iff -|z-w| \leq |z| - |w| \end{aligned} \tag{4}$$

   Donde en la penúltima desigualdad se utilizó la propiedad de simetría del módulo como métrica probada en (1). Tomando simultáneamente a (3) y (4) se tiene finalmente que:

   $$-|z-w| \leq |z| - |w| \leq |z-w| \overset{\text{def.}}{\implies} ||z| - |w|| \leq |z-w| \tag{5}$$

   Donde al final se utiliza la definición del *valor absoluto* de un número real. Probando así la desigualdad deseada.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

b) Tomando a $|\arg(z)|$ como el menor valor no negativo del conjunto $\arg(z)$. Ahora, utilizando la desigualdad del triángulo se tiene primeramente que:

$$|z-1| = |(z-|z|)+(|z|-1)| \leq |z-|z|| + ||z|-1| \tag{6}$$

Entonces, demostrando que $|z-|z|| \leq |z||\arg(z)|$ se concluiría la prueba. Geométricamente, $|z-|z||$ representa la distancia entre los complejos z y $|z| = |z| + i0$, que al tener los dos la misma norma, ambos están sobre la circunferencia de radio $|z|$, más aún, la distancia entre los complejos, al ser equivalente a la euclidiana, representa *la longitud del segmento* que une a los números como puntos del plano. Lo anterior se representa en la siguiente figura.

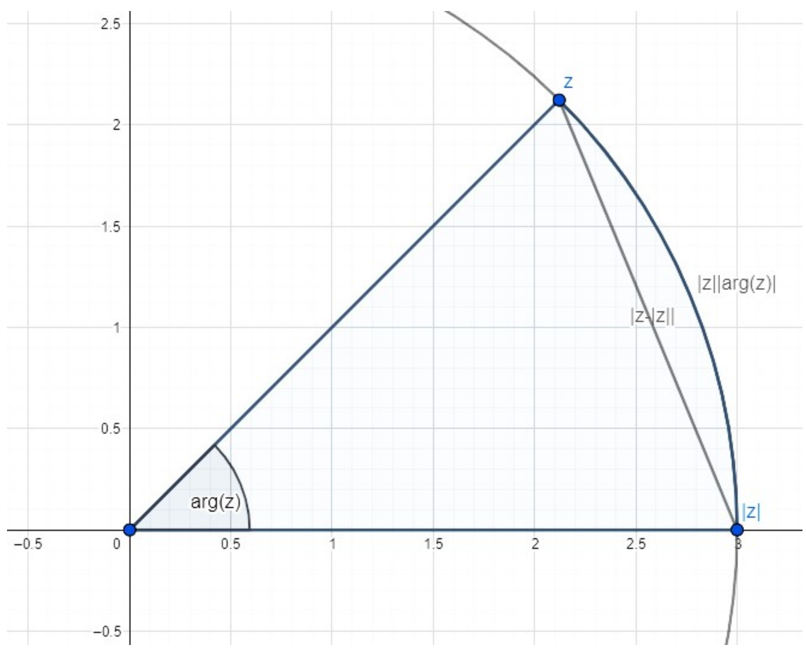

Figura 1: Representación gráfica de los complejos z y $|z|$, así como del segmento que los une y en la circunferencia sobre la que están.

Entonces, recordando de cursos de Geometría que la longitud del arco de una circunferencia de radio r que abre un ángulo θ está dado por $\ell = r\theta$, se tendría en este caso que dicha longitud de arco es $|z||\arg(z)|$, de donde se sigue inmediatamente que

$$|z-|z|| \leq |z||\arg(z)| \tag{7}$$

Sustituyendo (7) en (6) se concluye que

$$|z-1| \leq |z-|z|| + ||z|-1| \leq ||z|-1| + |z||\arg(z)| \tag{8}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

c) Primero supongamos que $|a| = 0$ (análogo para $|b| = 0$), entonces $a = 0$:

$$\left|\frac{-b}{1}\right| = |b| < 1 \quad \text{(por hipótesis)} \tag{9}$$

En el caso en que $|a| = |b| = 0$ se tendría que

$$\left|\frac{0}{1}\right| = 0 < 1 \tag{10}$$

Tomando entonces, $|a|, |b| \neq 0$. Para probar esto, primero es conveniente desarrollar para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ su módulo cuadrado, directamente de la definición de éste:

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w)\overline{(z-w)} = (z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\ &= z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + w\overline{w} \\ &= |z|^2 - \overline{z}w - z\overline{w} + |w|^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Además, al ser el módulo no negativo se cumple que para cualquier $u \in \mathbb{C}$:

$$|z| \geq 0 \text{ y } |z| < 1 \implies |z|^2 < 1 \iff 1 - |z|^2 > 0 \tag{12}$$

Utilizando que $|a|, |b| < 1$ se sigue que, por (10):

$$0 < (1-|a|^2)(1-|b|^2) \iff 0 < 1 - |a|^2 - |b|^2 + |a|^2|b|^2 \tag{13}$$

Pero reescribiendo esta última expresión se llega a la equivalente:

$$\begin{aligned} 1 - |a|^2 - |b|^2 + |a|^2|b|^2 &= 1 - |a|^2 - |b|^2 + |\overline{a}|^2|b|^2 + (\overline{a}b - \overline{a}b) - (a\overline{b} - a\overline{b}) \\ &= 1 - \overline{a}b - a\overline{b} + |\overline{a}b|^2 - |a|^2 + \overline{a}b + a\overline{b} - |b|^2 \\ &= |1 - \overline{a}b|^2 - |a-b|^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Entonces, de (9) y (11) se tiene finalmente que

$$\begin{aligned} 0 < (1-|a|^2)(1-|b|^2) &\iff 0 < 1 - |a|^2 - |b|^2 + |a|^2|b|^2 \\ &\iff 0 < |1-\overline{a}b|^2 - |a-b|^2 \\ &\iff |a-b|^2 < |1-\overline{a}b|^2 \\ &\iff \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right|^2 < 1 \\ &\iff \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1 \end{aligned} \tag{15}$$

Probando así la desigualdad deseada.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Considerando $z \in \mathbb{C}$ de norma 1, siguiendo resultados de la entrada de blog del curso: *Forma Polar. Potencias en* $\mathbb{C}$. `https://blog.nekomath.com/variable-compleja-i-forma-polar-potencias-y-raices-en-mathbbc/`, se tiene la representación polar de z como:

$$z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

Antes de seguir, es importante notar que en este caso al tomar conjugado y por el *Teorema de De Moivre*:

$$\overline{z} = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = \cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta) = [\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta]^{-1} = z^{-1} \tag{16}$$

Ahora, utilizando la fórmula dada para la suma de potencias de un complejo, utilizando de nuevo la *fórmula de De Moivre*:

$$\begin{aligned}
\frac{1-z^{n+1}}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} + z^n \\
&= 1 + [\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta] + \cdots + [\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta]^n \\
&= 1 + [\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta] + \cdots + [\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta] \\
&= [1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta] + i\,[\operatorname{sen}\theta + \cdots + \operatorname{sen} n\theta] \qquad (17)
\end{aligned}$$

De esta última expresión se hace notar que la suma buscada se puede calcular entonces como

$$1 + \cos\theta + \cdots + \cos n\theta = \operatorname{Re}\left[\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right] \tag{18}$$

Calculando explícitamente el cociente de (16) para el z considerado, utilizando la relación de (14) y sustituyendo z en su forma polar:

$$\begin{aligned}
\frac{1-z^{n+1}}{1-z} &= \frac{(1-z^{n+1})(1-\overline{z})}{(1-z)(1-\overline{z})} = \frac{1-z^{n+1}-\overline{z}+\overline{z}z^{n+1}}{1-z-\overline{z}+|z|^2} \\
&= \frac{1-z^{n+1}-\overline{z}+z^{-1}z^{n+1}}{1-z-\overline{z}+1} = \frac{1-z^{n+1}-\overline{z}+z^n}{2-z-\overline{z}} \\
&= \frac{1-[\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta]^{n+1}-[\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta]+[\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta]^n}{2-[\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta]-[\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta]} \\
&= \frac{1-[\cos((n+1)\theta)+i\operatorname{sen}((n+1)\theta)]-[\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta]+[\cos n\theta+i\operatorname{sen} n\theta]}{2-2\cos\theta} \\
&= \frac{1-\cos\theta+\cos n\theta-\cos((n+1)\theta)}{2-2\cos\theta} + i\frac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen} n\theta-\operatorname{sen}((n+1)\theta)}{2-\cos\theta}
\end{aligned} \tag{19}$$

De (17) y (16) se sigue directamente que la suma es pues:

$$1+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta = \operatorname{Re}\left[\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right] = \frac{1-\cos\theta+\cos n\theta-\cos((n+1)\theta)}{2-2\cos\theta} \tag{20}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

La conclusión del ejercicio es un ejercicio de álgebra utilizando algunas identidades trigonométricas usuales:

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos\theta+\cos n\theta-\cos((n+1)\theta)}{2-2\cos\theta} &= \frac{1-\cos\theta}{2[1-\cos\theta]}+\frac{\cos n\theta-\cos(n\theta+\theta)}{2[1-\cos\theta]} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\cos n\theta+\operatorname{sen} n\theta\operatorname{sen}\theta-\cos n\theta\cos\theta}{2[1-\cos\theta]} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen} n\theta\operatorname{sen}\theta}{2[1-\cos\theta]}+\frac{\cos n\theta[1-\cos\theta]}{2[1-\cos\theta]} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen} n\theta\left[2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]}{2[1-\cos\theta]}+\frac{\cos n\theta}{2}\frac{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen} n\theta\left[2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right]}{2[1-\cos\theta]}+\frac{\cos n\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen} n\theta\left[1-\left(1-2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right]}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}[1-\cos\theta]}+\frac{\cos n\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen} n\theta[1-\cos\theta]\cos\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}[1-\cos\theta]}+\frac{\cos n\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen} n\theta\cos\frac{\theta}{2}+\cos n\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}\left(n\theta+\frac{\theta}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n+1)}{2}\theta\right)}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}
\end{aligned} \tag{21}$$

Donde la última expresión es la buscada.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. $\Longrightarrow\rfloor$ Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ complejos tales que son vértices de un triángulo equilátero.

Por un lado, al ser un triángulo equilátero, se sabe que sus lados miden lo mismo, esto en términos del módulo como métrica se puede expresar como:

$$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| \tag{22}$$

Ahora, por ser un triángulo equilátero se sabe también que sus ángulos internos miden $\pm\frac{\pi}{3}$ (dependiendo del sentido en que se midan), entonces por las propiedades del argumento respecto al producto y el cociente descritas en la entrada de blog del curso: *Forma Polar. Potencias en* $\mathbb{C}$. `https://blog.nekomath.com/variable-compleja-i-forma-polar-potencias-y-raices-en-mathbbc/`:

$$\pm\frac{\pi}{3} = \arg(z_1 - z_3) - \arg(z_2 - z_3) = \arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right) \tag{23}$$

Entonces, de (20) y (21), se puede estudiar en forma polar el problema:

$$\left|\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}\right| = \frac{|z_1 - z_3|}{|z_2 - z_3|} = 1 \iff \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \tag{24}$$

Desarrollando la igualdad en (22) se tiene finalmente que:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} &\iff 2(z_1 - z_3) = (1 \pm i\sqrt{3})(z_2 - z_3)\\
&\iff 2z_1 - 2z_3 = z_2 - z_3 \pm i(z_2 - z_3)\sqrt{3}\\
&\iff 2z_1 - 2z_3 - z_2 + z_3 = \pm i\sqrt{3}(z_2 - z_3)\\
&\iff [2z_1 - z_2 - z_3]^2 = \left[i\sqrt{3}(z_2 - z_3)\right]^2\\
&\iff 4z_1^2 + z_2^2 + z_3^3 - 4z_1 z_2 - 4z_3 z_1 + 2z_2 z_3 = -3(z_2^2 - 2z_2 z_3 + z_3^2)\\
&\iff 4z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 3z_2^2 + 3z_3^2 = 6z_2 z_3 + 4z_1 z_2 + 4z_3 z_1 - 2z_2 z_3\\
&\iff 4(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) = 4(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3)\\
&\iff z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 && (25)
\end{aligned}$$

Donde la última expresión es precisamente la buscada. La implicación $\Longleftarrow\rfloor$ se sigue de la anterior ya que todos los argumentos fueron equivalencias.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. En este caso se utilizarán los resultados de la entrada de blog del curso: *El plano complejo extendido* $\mathbb{C}_\infty$. `https://blog.nekomath.com/el-plano-complejo-extendido-mathbbc_infty/`.
Sea $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$, así su punto diametralmente opuesto es $(-x, -y, -z) \in \mathbb{S}^2$. Ahora, utilizando el que $2\mathrm{Re}(z) = z + \overline{z}$ y $2i\mathrm{Im} = z - \overline{z}$, es posible invertir la proyección estereográfica (construida como en la entrada de blog) dando así:

$$\pi^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2, \qquad \pi^{-1}(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \frac{z - \overline{z}}{i(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \tag{26}$$

Así, para $z, w \in \mathbb{C}$, el que tengan imágenes diametralmente opuestas en la esfera de Riemann bajo la proyección estereográfica es equivalente a:

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(z) = -\pi^{-1}(w) \iff & \left(\frac{z + \overline{z}}{1 + |z|^2}, \frac{z - z\overline{z}}{i(1 + |z|^2)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \left(\frac{-w - \overline{w}}{1 + |w|^2}, \frac{\overline{w} - w}{i(1 + |w|^2)}, \frac{1 - |w|^2}{|w|^2 + 1} \right) \\
\iff & \begin{cases} z + \overline{z} + z|w|^2 + \overline{z}|w|^2 = -w - \overline{w} - w|z|^2 - \overline{w}|z|^2 \\ z - \overline{z} + z|w|^2 - \overline{z}|w|^2 = -w + \overline{w} - w|z|^2 + w|z|^2 \\ |zw|^2 + |z|^2 - |w|^2 - 1 = -|zw|^2 + |z|^2 - |w|^2 + 1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} z + z|w|^2 = -w - w|z|^2 \\ |zw| = 1 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} z\overline{w} = -\frac{|w|^2(1+|z|^2)}{1+|w|^2} \\ |zw| = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces, del último par de igualdades, el problema se reduce a probar que:

$$\begin{cases} z\overline{w} = -\frac{|w|^2(1+|z|^2)}{(1+|w|^2)} \\ |zw| = 1 \end{cases} \iff z\overline{w} = -1 \tag{27}$$

$\Longrightarrow \rfloor$ Supongamos el lado izquierdo de (25), veamos que $z\overline{w} = -1$.
Por la primera condición se sabe que $z\overline{w}$ es un real negativo, ahora, como $|zw| = |z\overline{w}| = 1$, se concluye que $z\overline{w} = -1$.
$\Longleftarrow \rfloor$ Supongamos que $z\overline{w} = -1$, veamos que se cumple el lado izquierdo de (25).
Es inmediato que $|z\overline{w}| = |-1| = |zw| = 1$, además:

$$z\overline{w} = -1 = -\frac{1 + |w|^2}{1 + |w|^2} = -\frac{|zw|^2 + |w|^2}{1 + |w|^2} = -\frac{|z|^2|w|^2 + |w|^2}{1 + |w|^2} = -\frac{|w|^2(1 + |z|^2)}{(1 + |w|^2)} \tag{28}$$

Entonces, al cumplirse (25), se concluye lo deseado.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. En este caso se utilizarán los resultados y nociones de las entradas de blog del curso: *Topología de* $\mathbb{C}$. `https://blog.nekomath.com/variable-compleja-i-topologia-de-mathbb` y *Conexidad y compacidad en un espacio métrico*. `https://blog.nekomath.com/conexidad-y-compacidad-en-un-espacio-metrico/`.
La prueba se hará por inducción sobre el número de subconjuntos poligonal-conexos.

   - Base $n = 2$. Veamos que si C_1 y C_2 son poligonal-conexos tales que $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$, entonces $C_1 \cup C_2$ es poligonal-conexo. Sean $p, q \in C_1 \cup C_2$, se tienen tres casos entonces:
     - Si $p, q \in C_1$, el resultado es trivial por la hipótesis sobre C_1, análogo si $p, q \in C_2$,
     - Si $p \in C_1$ y $q \in C_2$ (análogo para $q \in C_1$ y $p \in C_2$). Como $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$, existe un $r \in C_1 \cap C_2$. Ahora, como C_1 es poligonal-conexo, existe un polígono parametrizado por $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ tal que $f(0) = p$ y $f(1) = r$, de manera similar, como $r \in C_2$ y C_2 es poligonal-conexo, existe un polígono parametrizado por $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ tal que $g(0) = r$ y $g(1) = q$. Definiendo:

$$h : [0,1] \to \mathbb{C}, \quad h(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \tag{29}$$

       se tiene un polígono parametrizado (h es continua ya que $h(\frac{1}{2}) = f(1) = g(0)$) que para $t \in [0, \frac{1}{2}]$ coincide con f y para $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ coincide con g, es decir $h([0,1]) \subseteq C_1 \cup C_2$, así se tiene que $C_1 \cup C_2$ es poligonal-conexo.
   - Paso inductivo. Supongamos que $\bigcup_{j=1}^{n-1} C_j$ es poligonal-conexo, veamos que $\bigcup_{j=1}^{n} C_j$ es poligonal-conexo.
     Notando primero que por definición de unión:

$$\bigcup_{j=1}^{n} C_j = \left[\bigcup_{j=1}^{n-1} C_j \right] \cup C_n \tag{30}$$

     y, como $C_{n-1} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n-1} C_j$ y $C_{n-1} \cap C_n \neq \varnothing$, en particular $\left[\bigcup_{j=1}^{n-1} C_j \right] \cap C_n \neq \varnothing$. Entonces, denotando $C_1' = \bigcup_{j=1}^{n-1} C_j$ y $C_2' = C_n$, se tiene que (28) puede reescribirse como

$$\bigcup_{j=1}^{n} C_j = C_1' \cup C_2' \tag{31}$$

     Así, como C_1' y C_2' son poligonal-conexos (hipótesis de inducción) tales que $C_1' \cap C_2' \neq \varnothing$, por la base de inducción se sabe que su unión es poligonal-conexa.

   Por lo tanto, por *el principio de inducción*, la afirmación es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323