Variable Compleja I
Unidad 2: Tarea en equipo con soluciones

Problemas

1. Demuestra las siguientes afirmaciones.

   a) Sea U una región de $\mathbb{C}$, definimos $U^* = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in U\}$. Si $f : U \to \mathbb{C}$ es analítica en U, demuestra que $f^* : U^* \to \mathbb{C}$ dada por $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es analítica en U^*.

   b) Demuestra que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si
   $$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

   c) La función $f(z) = e^{\overline{z}}$ **no** es analítica en $\mathbb{C}$.

2. Demuestra que $|e^{z^2}| \leq e^{|z|^2}$. Da un ejemplo de un z para el cual la desigualdad sea estricta.

3. Para $R > 0$ denotamos
   $$\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}.$$
   Sean $f, g : \mathbb{D}_R \to \mathbb{C}$ funciones analíticas en $\mathbb{D}_R$ tal que nunca se anulan en $\mathbb{D}_R$. Demuestra que si para todo $z \in \mathbb{D}_R$ se cumple que
   $$|f(z)| = |g(z)|,$$
   entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f = \lambda g$.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Calcula lo siguiente:

    a) El dominio de analicidad y la derivada de $f(z) = 3z^2 - e^{i2z} + i\mathrm{Log}(z)$,

    b) Las soluciones a la ecuación $(1-i)e^z = 1+i$,

    c) La parte real y la parte imaginaria de $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$,

    d) Usando la rama principal del logaritmo, calcula

$$\left[\frac{e}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right]^{3\pi i}.$$

5. Sean $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $z_0 \in \mathbb{D}$. Demuestra que la restricción a $\mathbb{D}$ de la transformación de Möbius

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z},$$

es una biyección de $\mathbb{D}$ sobre sí mismo, demostrando primero que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Soluciones

1. Este ejercicio es interesante porque habla de qué ocurre con la analicidad respecto a las conjugaciones.

   a) Para hablar de analicidad es necesario tener una región, entonces primero hay que verificar que U^* así definido es un abierto de $\mathbb{C}$. Es decir, veamos que para $z \in U^*$, existe un $r > 0$ tal que $\mathbb{D}_r(z) \subset U^*$. Como $z \in U^*$, por definición $\overline{z} \in U$, entonces al ser U abierto, existe $s > 0$ tal que $\mathbb{D}_s(\overline{z}) \subset U$. Definiendo:

   $$\mathbb{D}_s^*(\overline{z}) = \{w \in \mathbb{C} \mid \overline{w} \in \mathbb{D}_s(\overline{z})\}$$

   Se tiene, por definición de U^* que $\mathbb{D}_s^*(\overline{z}) \subset U^*$ y por consecuencia directa de $|z| = |\overline{z}|$, que $\mathbb{D}_s^*(\overline{z}) = \mathbb{D}_s(z)$, de lo que se sigue que U^* sea abierto.
   Resta verificar que la derivada de f^* está definida en todo U^*, sabiendo que la derivada de f existe en todo U, entonces tomando la definición de derivada en $z \in U^*$:

   $$\begin{aligned} f^{*\prime}(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f^*(z+h) - f^*(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\overline{z})}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z}+\overline{h}) - f(\overline{z})}}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z}+u) - f(\overline{z})}}{\overline{u}} \\ &= \lim_{u\to 0} \overline{\left(\frac{f(\overline{z}+u) - f(\overline{z})}{u}\right)} = \overline{\left(\lim_{u\to 0} \frac{f(\overline{z}+u) - f(\overline{z})}{u}\right)} = \overline{f'(\overline{z})}, \end{aligned}$$

   donde se utilizó que $h \to 0 \iff \overline{h} \to 0$ y el cambio de variable $u = \overline{h}$. Por lo tanto, como f es analítica en U y $\overline{z} \in U$, existe $\overline{f'(\overline{z})} = f^{*\prime}(z)$. Como $z \in U^*$ fue arbitrario, se concluye que f^* es analítica en U^*

   b) Primero vale la pena recordar la definición de la derivada de Wirtinger respecto a $\overline{z}$. Para $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sus derivadas de Wirtinger se definen como:

   $$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right], \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right].$$

   Sea $f = u + iv$ tal que satisface la condición sobre su derivada de Wirtinger, toca verificar que f satisface:

   $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Entonces, desarrollando en la expresión de la derivada de Wirtinger:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \iff & \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right], \\
\iff & \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}, \\
\iff & \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} - i^2\frac{\partial v}{\partial y}, \\
\iff & \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \\
\iff & \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

c) Esto último puede verificarse de varias maneras. Usando directamente el inciso anterior, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} e^{\overline{z}} = e^{\overline{z}} \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como la derivada de Wirtinger respecto de $\overline{z}$ es distinta de 0, f no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y, por lo tanto, no es analítica en ninguna región $U \subseteq \mathbb{C}$.
También es posible probar esto verificando explícitamente que **no** se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann usuales, esto notando primero que:

$$e^{\overline{z}} = e^{x-iy} = e^{x}\left[\cos y - i \operatorname{sen} y\right]$$

Entonces, tomando las parciales de las partes real e imaginaria:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x}\cos y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{x}\cos y, \\
&\implies \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \iff \cos y = -\cos y.
\end{aligned}
$$

Pero esa última ecuación tiene como conjunto solución $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, el cual no es abierto, por lo que no se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un abierto y, al ser la analicidad una noción local en abiertos, no es una función analítica.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Para ver esto, recordando que para todo $z \in \mathbb{C}$, siempre $\mathrm{Im}[z] \in \mathbb{R}$, entonces de la expresión de la parte imaginaria en términos de z se tiene que:

$$(\mathrm{Im}[z])^2 = \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 = \frac{(z-\overline{z})^2}{-4} \implies (z-\overline{z})^2 = -4(\mathrm{Im}[z])^2 \leq 0.$$

Utilizando que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x$ es *monótona creciente* y siempre positiva, desarrollando la última desigualdad se obtiene preliminarmente que:

$$\begin{aligned}
(z-\overline{z})^2 \leq 0 &\implies z^2 - 2z\overline{z} + \overline{z}^2 \leq 0,\\
&\implies z^2 + \overline{z}^2 \leq 2z\overline{z},\\
&\implies \frac{z^2 + \overline{z^2}}{2} \leq z\overline{z},\\
&\implies \mathrm{Re}[z^2] \leq |z|^2,\\
&\implies e^{\mathrm{Re}[z^2]} \leq e^{|z|^2},\\
&\implies \left|e^{\mathrm{Re}[z^2]}\right| \leq e^{|z|^2}.
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando que $|e^{iy}| = 1$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$, en particular para $y = \mathrm{Im}[z^2]$, entonces usando que el módulo es multiplicativo se tiene

$$\left|e^{\mathrm{Re}[z^2]}\right| = \left|e^{\mathrm{Re}[z^2]}\right|\left|e^{i\mathrm{Im}[z^2]}\right| = \left|e^{\mathrm{Re}[z^2]+i\mathrm{Im}[z^2]}\right| = \left|e^{z^2}\right|$$
$$\left|e^{\mathrm{Re}[z^2]}\right| \leq e^{|z|^2} \implies \left|e^{z^2}\right| \leq e^{|z|^2}.$$

Como la condición de la que se partió fue $-4(\mathrm{Im}[z])^2 \leq 0$, basta que esta desigualdad sea estricta para que la demostrada sea también estricta, lo cual se cumple siempre y cuando $\mathrm{Im}[z] \neq 0$.
Como ejemplo explícito, se puede tomar $z = 1 + i$, el cual cumple que:

$$|z|^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad z^2 = 2i,$$

entonces la desigualdad de interés es

$$\left|e^{z^2}\right| = |e^{2i}| = 1 < e^2 = e^{|z|^2}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. Como f y g no se anulan en el disco, definimos $h : \mathbb{D}_R \to \mathbb{C}$ tal que

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)},$$

además, al ser cociente de funciones analíticas, también es una función analítica, la cual además cumple para cualquier $z \in \mathbb{D}_R$ que:

$$|h(z)| = \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = \frac{|f(z)|}{|g(z)|} = 1 \implies h(z) \in \mathbb{S}^1.$$

Entonces, escribiendo a h como su parte real e imaginaria $h = u + iv$, la condición de normalidad anterior puede reescribirse como:

$$|h(z)|^2 = |u(x,y) + iv(x,y)|^2 = u^2 + v^2 = 1,$$

condición que al derivarla lleva al sistema de ecuaciones:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

También, por ser h analítica, satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, las cuales al sustituirlas en el sistema de ecuaciones anterior, implican que:

$$-u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Entonces, utilizando todo lo anterior:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= (u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial x} = u^2\frac{\partial u}{\partial x} + v^2\frac{\partial u}{\partial x} \\
&= u\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + v\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + uv\frac{\partial v}{\partial x} - uv\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= u\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + v\left(-u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= (u^2+v^2)\frac{\partial v}{\partial x} = u^2\frac{\partial v}{\partial x} + v^2\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= u\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + v\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + uv\frac{\partial u}{\partial x} - uv\frac{\partial u}{\partial x} \\
&= u\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) + v\left(v\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0.
\end{aligned}$$

De lo anterior, y de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se tiene que la derivada de h es una constante que **no depende** de x ni de y, es decir:

$$h'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \implies h(z) = \lambda \iff \frac{f(z)}{g(z)} = \lambda \iff f(z) = \lambda g(z).$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. a) Al ser $3z^2$ polinomial, en particular es analítica en todo $\mathbb{C}$, de manera similar e^{i2z} es analítica en todo $\mathbb{C}$, por lo que las restricciones al dominio de analicidad están en el término $i\text{Log}(z)$, pero como se demuestra en la entrada de blog correspondiente `https://blog.nekomath.com/logaritmo-complejo-y-potencias-complejas/`, el logaritmo complejo en su rama principal es analítico en $D_{-\pi} = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. De esto se concluye que f así definida es analítica en $D_{-\pi} = \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$. Para calcular su derivada, basta utilizar la linealidad de la derivada, ya que al ser analíticas basta seguir las reglas usuales de derivación:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = 3\frac{d}{dz}z^2 - \frac{d}{dz}e^{i2z} + i\frac{d}{dz}\text{Log}(z) = 6z - i2e^{i2z} + i\frac{1}{z}.$$

La expresión anterior, de nuevo, sólo tiene sentido para $z \in D_{-\pi}$.

b) Para resolver esta ecuación, por las propiedades de los números complejos se puede reescribir primero como:

$$(1-i)e^z = 1+i \iff e^z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1}{2}(1+i)^2 = i.$$

Entonces, la familia de soluciones a la ecuación es la que se obtiene al aplicar el logaritmo, la solución no es única ya que no se especifica la rama del logaritmo considerada, así:

$$e^z = i \iff z = \log i = \ln|i| + i\arg(i).$$

Calculando ambos valores necesarios para esta expresión:

$$\begin{aligned} |i| = 1 \quad \text{y} \quad \text{Arg}(i) = \arctan\frac{1}{-1} = \pi, \\ \implies z = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i\pi(2k+1), \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

c) Para calcular esto, es suficiente desarrollar el número complejo por la definición del coseno:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Susstituyendo $z = \frac{\pi}{2} + i$ y la definición de la exponencial compleja:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right) &= \frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+i\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+i\right)}}{2} = \frac{e^{-1+i\frac{\pi}{2}} + e^{1-i\frac{\pi}{2}}}{2}, \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) + e\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right], \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-1}i - ei\right] = i\frac{1-e^2}{2e}. \end{aligned}$$

Entonces, de la última expresión se concluye que

$$\text{Re}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right)\right] = 0 \quad \text{y} \quad \text{Im}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right)\right] = \frac{1-e^2}{2e}.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

d) Notando primero que al trabajar en la rama principal del logaritmo, se toman argumentos tales que $\theta \in [-\pi, \pi)$. Una primera observación importante es:

$$\frac{e}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right) = e\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = e\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Ahora, por la definición del logaritmo complejo:

$$\log z = \ln|z| + i(\mathrm{Arg} z + 2\pi k)$$

Tomando $k = 0$ y lo observado inicialmente se tiene que:

$$\log\left[\frac{e}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right] = \ln e - i\frac{2\pi}{3} = 1 - i\frac{2\pi}{3}$$

Entonces, en la rama principal del logaritmo:

$$\begin{aligned}\left[\frac{e}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right]^{3\pi i} &= e^{3\pi i \log\left[\frac{e}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)\right]} = e^{3\pi i\left(1-i\frac{2\pi}{3}\right)}, \\ &= e^{2\pi^2+3\pi i} = e^{2\pi^2}(\cos 3\pi + i\operatorname{sen} 3\pi), \\ &= e^{2\pi^2}(-1+0) = -e^{2\pi^2}\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. Primero es necesario ver que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Sean $z, z_0 \in \mathbb{D}$ y $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces, primero se tiene que:

$$|T(z)| = \left| e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right| = |e^{i\theta}| \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right| = \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|.$$

Ahora, para concluir que lo anterior es un elemento del disco unitario, basta concluir del lema que se demuestra al final del ejercicio:
Lema. Para $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a|, |b| < 1$,

$$\left| \frac{a - b}{1 - \overline{a} b} \right| < 1.$$

Entonces, al ser $z, z_0 \in \mathbb{D}$, en particular $|z|, |z_0| < 1$, entonces por el lema $|T(z)| < 1$, es decir, $T(z) \in \mathbb{D}$. Para concluir la biyectividad y que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, basta probar que es suprayectiva ya que en general las transformaciones de Möbius son inyectivas, en particular las restricciones de éstas. Para la suprayectividad es posible exhibir un $w \in \mathbb{D}$ tal que $T(w) = w_0 \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} T(w) = w_0 &\iff e^{i\theta} \frac{w - z_0}{1 - \overline{z_0} w} = w_0, \\ &\iff w - z_0 = e^{-i\theta} w_0 - e^{-i\theta} \overline{z_0} w w_0, \\ &\iff (1 + e^{-i\theta} \overline{z_0} w_0) w = e^{-i\theta} w_0 + z_0, \\ &\iff w = \frac{e^{-i\theta} w_0 + z_0}{1 + e^{-i\theta} \overline{z_0} w_0}, \\ &\iff w = \frac{w_0 + e^{i\theta} z_0}{e^{i\theta} + \overline{z_0} w_0} \in \mathbb{D}. \end{aligned}$$

Donde la última pertenencia se da por el mismo lema técnico, entonces por dicho w, se tiene que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, además la inversa de T está dada por la última expresión como:

$$T^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}, \qquad T^{-1}(z) = \frac{z + e^{i\theta} z_0}{e^{i\theta} + \overline{z_0} z}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Demostración del Lema. Primero supongamos que $|a| = 0$ (análogo para $|b| = 0$), entonces $a = 0$:

$$\left|\frac{-b}{1}\right| = |b| < 1 \quad \text{(por hipótesis)}$$

En el caso en que $|a| = |b| = 0$ se tendría que

$$\left|\frac{0}{1}\right| = 0 < 1$$

Tomando entonces, $|a|, |b| \neq 0$. Para probar esto, primero es conveniente desarrollar para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ su módulo cuadrado, directamente de la definición de éste:

$$\begin{aligned} |z - w|^2 &= (z - w)\overline{(z - w)} = (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) \\ &= z\overline{z} - z\overline{w} - \overline{z}w + w\overline{w} \\ &= |z|^2 - \overline{z}w - z\overline{w} + |w|^2 \end{aligned}$$

Además, al ser el módulo no negativo se cumple que para cualquier $u \in \mathbb{C}$:

$$|z| \geq 0 \text{ y } |z| < 1 \implies |z|^2 < 1 \iff 1 - |z|^2 > 0$$

Utilizando que $|a|, |b| < 1$ se sigue que, por (10):

$$0 < (1 - |a|^2)(1 - |b|^2) \iff 0 < 1 - |a|^2 - |b|^2 + |a|^2|b|^2$$

Pero reescribiendo esta última expresión se llega a la equivalente:

$$\begin{aligned} 1 - |a|^2 - |b|^2 + |a|^2|b|^2 &= 1 - |a|^2 - |b|^2 + |\overline{a}|^2|b|^2 + (\overline{a}b - \overline{a}b) - (a\overline{b} - a\overline{b}) \\ &= 1 - \overline{a}b - a\overline{b} + |\overline{a}b|^2 - |a|^2 + \overline{a}b + a\overline{b} - |b|^2 \\ &= |1 - \overline{a}b|^2 - |a - b|^2 \end{aligned}$$

Entonces, de (9) y (11) se tiene finalmente que

$$\begin{aligned} 0 < (1 - |a|^2)(1 - |b|^2) &\iff 0 < 1 - |a|^2 - |b|^2 + |a|^2|b|^2 \\ &\iff 0 < |1 - \overline{a}b|^2 - |a - b|^2 \\ &\iff |a - b|^2 < |1 - \overline{a}b|^2 \\ &\iff \left|\frac{a - b}{1 - \overline{a}b}\right|^2 < 1 \\ &\iff \left|\frac{a - b}{1 - \overline{a}b}\right| < 1 \end{aligned}$$

Probando así la desigualdad deseada.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323