Variable Compleja I
Unidad 2: Tarea en equipo

Estos son los enunciados de la tarea en equipos. Deberán entregarla de acuerdo a todas las instrucciones indicadas en Moodle.

1. Demuestra las siguientes afirmaciones.

   a) Sea U una región de $\mathbb{C}$, definimos $U^* = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in U\}$. Si $f : U \to \mathbb{C}$ es analítica en U, demuestra que $f^* : U^* \to \mathbb{C}$ dada por $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ es analítica en U^*.

   b) Demuestra que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si
   $$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

   c) La función $f(z) = e^{\overline{z}}$ **no** es analítica en $\mathbb{C}$.

2. Demuestra que $|e^{z^2}| \leq e^{|z|^2}$. Da un ejemplo de un z para el cual la desigualdad sea estricta.

3. Para $R > 0$ denotamos
   $$\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$$
   Sean $f, g : \mathbb{D}_R \to \mathbb{C}$ funciones analíticas en $\mathbb{D}_R$ tal que nunca se anulan en $\mathbb{D}_R$. Demuestra que si para todo $z \in \mathbb{D}_R$ se cumple que
   $$|f(z)| = |g(z)|$$
   entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $f = \lambda g$.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Calcula lo siguiente:

   a) El dominio de analicidad y la derivada de $f(z) = 3z^2 - e^{i2z} + i\text{Log}(z)$,

   b) Las soluciones a la ecuación $(1-i)e^z = 1+i$,

   c) La parte real y la parte imaginaria de $z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$,

   d) Usando la rama principal del logaritmo, calcula

$$\left[\frac{e}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right]^{3\pi i}$$

5. Sean $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $z_0 \in \mathbb{D}$. Demuestra que la restricción a $\mathbb{D}$ de la transformación de Möbius

$$T(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$$

   es una biyección de $\mathbb{D}$ sobre sí mismo, demostrando primero que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323