# Variable Compleja I
# Unidad 3: Tarea en equipo con soluciones

**Problemas**

1. Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto compacto y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{C}}$ sucesiones de funciones continuas en $A$ tales que existen $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de modo que:

$$f_n \to f, \qquad g_n \to g \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

uniformenente en $A$. Demuestra que:

$$f_n g_n \to fg \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

uniformemente en $A$.

2. Sea $0 < r < 1$. Demuestra que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{r \operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

3. Utilizando la expresión del seno como serie de potencias, calcula una expresión en serie para la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z+2}$ alrededor de cero.

4. Los números de Fibonacci $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se definen recursivamente como:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Demuestra que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son coeficientes de la expansión en series de una función racional y, con ella, da una forma cerrada para $F_n$.

5. *Un primer vistazo a la función* $\zeta$. Considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

   a) Demuestra que la serie converge para $p > 1$,

   b) Demuestra que la serie diverge si $p \leq 1$,

   c) Demuestra que si $p$ es complejo, la serie converge si $\operatorname{Re}[p] > 1$.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

**Soluciones**

1. Sea $\epsilon > 0$. Lo que se quiere demostrar es que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ y para todo $z \in A$ se cumple que:

$$|f_n(z)g_n(z) - f(z)g(z)| < \epsilon.$$

**Lema.** Existen $N_1 \in \mathbb{N}$ y $M_1 > 0$ tales que para $n \geq N_1$ y para todo $z \in A$:

$$|g_n(z)| \leq M_1.$$

*Demostración del lema.* Como $g_n \to g$ uniformemente en $A$ y cada $g_n$ es continua, se sabe que entonces $g$ es continua en $A$ también, y es un resultado conocido que las funciones continuas en un subconjunto compacto alcanzan su máximo y su mínimo, en particular $\max_{z\in A} |g(z)| < \infty$ (ocurre algo análogo para la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $f$). Ahora, por la convergencia uniforme, en particular para $\epsilon^* = 1 > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n \geq N_1$ y $z \in A$:

$$|g_n(z) - g(z)| < 1 \implies |g_n(z)| < 1 + |g(z)| \leq 1 + \max_{z\in A} |g(z)| < \infty,$$

entonces, tomando $M_1 = 1 + \max_{z\in A} |g(z)|$, se tiene que para $N_1 \in \mathbb{N}$ dado se cumple que $|g_n(z)| < M_1$.
Utilizando el lema anterior, es posible estudiar la convergencia uniforme del producto. Sea $z \in A$:

$$\begin{aligned} |f_n(z)g_n(z) - f(z)g(z)| &= |f_n(z)g_n(z) - f(z)g_n(z) + f(z)g_n(z) - f(z)g(z)| \\ &\leq |f_n(z)g_n(z) - f(z)g_n(z)| + |f(z)g_n(z) - f(z)g(z)| \\ &= |g_n(z)||f_n(z) - f(z)| + |f(z)||g_n(z) - g(z)| \end{aligned}$$

Por el lema anterior, considerando $N_1 \in \mathbb{N}$ y $M_1 > 0$ los valores tales que para $n \geq N_1$ y $z \in A$, se tiene que $|g_n(z)| \leq M_1$, y considerando $M_2 > 0$ como $M_2 = \max_{z\in A} |f(z)|$, para $n \geq N_1$ se tiene que:

$$\begin{aligned} |f_n(z)g_n(z) - f(z)g(z)| &\leq |g_n(z)||f_n(z) - f(z)| + |f(z)||g_n(z) - g(z)| \\ &\leq M_1|f_n(z) - f(z)| + M_2|g_n(z) - g(z)|. \end{aligned}$$

Finalmente, como $f_n \to f$ y $g_n \to f$ uniformemente en $A$, existen $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ tales que para $N^* = \max\{N_2, N_3\},\ n \geq N^*$ y $z \in A$:

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2(M_1+1)} \quad \text{y} \quad |g_n(z) - g(z)| < \frac{\epsilon}{2(M_2+1)},$$

Entonces, para $N = \max\{N_1, N^*\}$ y $z \in A$ se concluye que

$$\begin{aligned} |f_n(z)g_n(z) - f(z)g(z)| &\leq M_1|f_n(z) - f(z)| + M_2|g_n(z) - g(z)| \\ &< \frac{M_1\epsilon}{2(M_1+1)} + \frac{M_2\epsilon}{2(M_2+1)} < \epsilon, \end{aligned}$$

por lo tanto, $f_ng_n \to fg$ uniformemente en $A$.


Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Para demostrar ambas expresiones, es suficiente analizar la serie dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n.$$

Para poder analizar esta serie como una geométrica, basta notar que $|re^{in\theta}| = |r||e^{in\theta}| = |r| < 1$, por lo que la expresión está dentro del radio de convergencia de la geométrica, entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n &= \frac{1}{1 - re^{i\theta}} \\
&= \frac{1}{1 - re^{i\theta}} \left( \frac{1 - re^{-i\theta}}{1 - re^{-i\theta}} \right) \\
&= \frac{1 - re^{-i\theta}}{1 - re^{-i\theta} - re^{i\theta} + r^2} \\
&= \frac{1 - re^{-i\theta}}{1 + r^2 - 2r\mathrm{Re}[e^{i\theta}]} \\
&= \frac{1 - r(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)}{1 + r^2 - 2r\cos\theta} \\
&= \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} + i\frac{r\operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.
\end{aligned}$$

Por lo que las partes real e imaginaria de la serie son:

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right] = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}\left[\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right] = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Por otro lado, de la expresión conocida para la exponencial de un imaginario se tiene también que:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n [\cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta) + i\sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{sen}(n\theta).
\end{aligned}$$

Por lo que ahora se tiene que las partes real e imaginaria de la serie son:

$$\mathrm{Re}\left[\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta) \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}\left[\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{sen}(n\theta).$$

Comparando ambas expresiones obtenidas para partes real e imaginaria se concluye que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$


Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. Primero hay que determinar en qué región es analítica la función para que sea válido aplicar el teorema de Taylor. Es inmediato que la función es analítica para cualquier $z \neq -2$ ya que la derivada existe en ese dominio:

$$\frac{d}{dz}\frac{\operatorname{sen} z}{z+2} = \frac{(z+2)\cos z - \operatorname{sen} z}{(z+2)^2}. \tag{1}$$

En particular $f$ es analítica en $\mathbb{D}_2(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$. Ahora, como $0 \in \mathbb{D}_2(0)$, por el teorema de Taylor se sabe que:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}, & \text{si } n = 4j+1, \\ -\frac{1}{n!}, & \text{si } n = 4j+3, \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}.$$

Ahora, como $|z| < 2 \iff \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, también se cumple que en $\mathbb{D}_2(0)$:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{z}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n.$$

Entonces la función $f$ original, tendrá una expansión en serie dada por el *producto de ambas series*, así ésta se puede calcular con la expresión conocida para el producto de series:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

Sustituyendo las sucesiones de coeficientes que se conocen, se tiene que:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z+2} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}} z^k\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n+1-k}}\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j\in A}^{n}\frac{1}{(4j+1)!}\frac{(-1)^{(4j+1)-k}}{2^{(4j+1)+1-k}} + \sum_{j\in B}^{n}\frac{1}{(4j+3)!}\frac{(-1)^{(4j+3)-k}}{2^{(4j+3)+1-k}}\right], \end{aligned}$$

donde $A$ y $B$ denotan los conjuntos donde son distintos de 0 los coeficientes de la serie del seno.


Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Para este ejercicio, se hará todo de manera constructiva. Primero se define la serie:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} F_1 z^n,$$

donde la sucesión de coeficientes $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de Fibonacci como se define en el ejercicio. Siguiendo la idea tras la construcción de la fórmula de la serie geómetrica, se tiene que:

$$\begin{aligned} F(z) &= F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3 + F_4 z^4 + \cdots \\ -zF(z) &= -F_1 z^2 - F_2 z^3 - F_3 z^4 - F_4 z^5 + \cdots \\ -z^2 F(z) &= -F_1 z^3 - F_2 z^4 - F_3 z^5 - F_4 z^6 + \cdots \end{aligned}$$

Entonces, sumando estas expresiones, utilizando que $F_1 = F_2 = 1$, se tiene que:

$$(1 - z - z^2)F(z) = z \iff F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{-z}{z^2 + z - 1},$$

teniendo así una respuesta a la primera pregunta, donde esta última expresión es válida siempre y cuando $z \neq \varphi_1, \varphi_2$, con $\varphi_1, \varphi_2$ las soluciones a la ecuación $z^2 + z - 1 = 0$, las cuales están dadas explícitamente por la fórmula general para ecuaciones de segundo grado como:

$$\varphi_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

de esto se siguen varias propiedades interesantes fáciles de verificar que relacionan a $\varphi_1$ y $\varphi_2$ (siguiendo la convención de que $\varphi_1$ sea la raíz asociada a la suma y $\varphi_2$ a la resta):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sqrt{5} \qquad \text{y} \qquad \varphi_1 \varphi_2 = -1.$$

Para obtener la forma cerrada para $F_n$, haciendo una descomposición en fracciones parciales de la función racional que se tiene:

$$\begin{aligned} &\frac{-z}{(z + \varphi_1)(z + \varphi_2)} = \frac{A}{z + \varphi_1} + \frac{B}{z + \varphi_2}, \\ \iff & -z = A(z + \varphi_2) + B(z + \varphi_1), \\ \iff & \begin{cases} \varphi_1 = A(-\varphi_1 + \varphi_2) \\ \varphi_2 = B(-\varphi_2 + \varphi_1) \end{cases}, \\ \implies & A = -\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi_1 \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi_1. \end{aligned}$$

Así se tiene una nueva expresión para $F$ como:

$$F(z) = -\frac{\varphi_1}{\sqrt{5}} \frac{1}{z + \varphi_1} + \frac{\varphi_2}{\sqrt{5}} \frac{1}{z + \varphi_2}.$$


Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Reescribiendo esta última expresión y utilizando la serie geométrica, así como las relaciones entre $\varphi_1$ y $\varphi_2$...

$$
\begin{aligned}
F(z) &= -\frac{\varphi_1}{\sqrt{5}}\frac{1}{z+\varphi_1} + \frac{\varphi_2}{\sqrt{5}}\frac{1}{z+\varphi_2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\frac{z}{\varphi_1}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\frac{z}{\varphi_2}+1} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{-z\varphi_2+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{-z\varphi_1+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[-\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_2^k z^k + \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_1^k z^k\right],
\end{aligned}
$$

ahora esta última suma puede simplificarse más utilizando que la suma de series se hace sumando coeficientes de términos del mismo grado, dando finalmente que

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^k - \varphi_2^k)z^k.$$

Comparando esta nueva expresión en serie con la definición original de $F$, utilizando que la igualdad de series de potencia se da con la igualdad de coeficientes de términos del mismo grado se concluye que:

$$\sum_{k=0}^{\infty}F_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^k - \varphi_2^k)z^k \iff F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi_1^k - \varphi_2^k).$$

Al valor $\varphi_1$ se le conoce como la *razón áurea*, a la última expresión se le conoce como *fórmula de Binet* y a la función racional obtenida en el primer paso se le conoce como *función generadora de los números de Fibonacci.*


Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. La serie de interés es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}.$$

a) Para demostrar este inciso, al tratarse de una serie de números positivos, basta acotar superiormente por alguna serie que sí converja. Utilizando que:

$$p > 1 \quad \text{y} \quad 0 < a < b \implies a^p < b^p \implies \frac{1}{b^p} < \frac{1}{a^p},$$

es posible acotar la serie, considerando que $p > 1 \iff p-1 > 0$, de acuerdo a:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1^p} &= \frac{1}{1^{p-1}}, \\
\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} &\leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}, \\
\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} &\leq \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}} = \frac{1}{2^{2(p-1)}}, \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots &\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad .
\end{aligned}$$

Entonces, siguiendo tal patrón se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{p-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{p-1}}} < \infty,$$

donde en la última igualdad se utilizó que como $p - 1 > 0$, entonces $\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} < 1$, así es válido utilizar la serie geómetrica. Entonces, por el criterio de comparación, la serie original converge.

b) Para demostrar este inciso, es posible utilizar la misma técnica que en el anterior, esta vez acotando por abajo con alguna serie que diverja, utilizando que:

$$p < 1 \quad \text{y} \quad n \geq 1 \implies \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p},$$

entonces se tiene inmediatamente como cota inferior a la *serie armónica* de modo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

pero se sabe que ésta diverge, así por el criterio de comparación, la serie original diverge para $p < 1$.

c) Para este inciso, es conveniente recordar que para $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión de números complejos, se cumple que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| < \infty.$$


Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Sea $p \in \mathbb{C}$ de modo que $p = x + iy$, entonces la serie en este caso se puede reescribir como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+iy}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x n^{iy}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-iy \ln n}}{n^x}.$$

En particular, como $y \ln n \in \mathbb{R}$, se tiene que $|e^{-iy \ln n}| = 1$. Ahora el módulo de la serie se puede acotar, por la desigualdad del triángulo, como:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-iy \ln n}}{n^x} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-iy \ln n}}{n^x} \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|e^{-iy \ln n}|}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}. \end{aligned}$$

Pero esta última expresión, por el inciso a, se sabe que converge cuando $x = \mathrm{Re}[p] > 1$, con lo que se tiene el resultado.
A la función $\zeta : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $A = \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}[s] > 1\}$ dada por:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

se le conoce como la *función zeta de Riemann*.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323