Variable Compleja I
Unidad 3: Tarea en equipo

Estos son los enunciados de la tarea en equipos. Deberán entregarla de acuerdo a todas las instrucciones indicadas en Moodle.

1. Sea $A \subseteq \mathbb{C}$ un subconjunto compacto y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{g_n\}_{n\in\mathbb{C}}$ sucesiones de funciones continuas en A tales que existen $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de modo que:

$$f_n \to f, \qquad g_n \to g \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

   uniformenente en A. Demuestra que:

$$f_n g_n \to fg \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

   uniformemente en A.

2. Sea $0 < r < 1$. Demuestra que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos(n\theta) = \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} r^n \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{r \operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

3. Utilizando la expresión del seno como serie de potencias, calcula una expresión en serie para la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z+2}$ alrededor de cero.

4. Los números de Fibonacci $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se definen recursivamente como:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

   Demuestra que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son coeficientes de la expansión en series de una función racional y, con ella, da una forma cerrada para F_n.

5. *Un primer vistazo a la función* ζ. Considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

   a) Demuestra que la serie converge para $p > 1$,

   b) Demuestra que la serie diverge si $p \leq 1$,

   c) Demuestra que si p es complejo, la serie converge si $\mathrm{Re}[p] > 1$.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323