Variable Compleja I
Unidad 4: Tarea en equipo con soluciones

Problemas

1. Evalúa las integrales:

$$\int_C \mathrm{Re}[z]dz, \quad \int_C \mathrm{Im}[z]dz \quad \text{y} \quad \int_C \overline{z}dz.$$

   a lo largo de las curvas C descritas por:

   a) El segmento de recta que une 0 y $1-i$.
   b) La circunferencia $|z|=1$ y.
   c) La circunferencia $|z-a|=1$.

2. Sea $f:\overline{B}(a,R)\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una función analítica en $\overline{B}(a,R)$ con un único cero a en el interior de este conjunto. Demuestra que, si k es el orden de a, entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = k.$$

3. Sea $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ una región y $f:\Omega\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Demuestra que f es analítica con $f'(z)\neq 0$ si y sólo si f como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es conforme.

4. Sean $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ y $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ convergentes para $|z|<R$, para algún $R>0$, y sea γ una circunferencia de radio $r<R$. Se define:

$$F(z):=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\xi)}{\xi}g\left(\frac{z}{\xi}\right)d\xi.$$

   Demuestra que $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nz^n$.

5. Sea $f:B(a,r)\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una función analítica en $B(a,r)$. Demuestra que, para $n\in\mathbb{N}$, y $M>0$ tal que $|f(z)|<M$ se cumple que:

$$|f^{(n)}(a)|\leq\frac{Mn!}{r^n}.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Soluciones

1. Sea $z \in \mathbb{C}$ dado por $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones a integrar se pueden ver como $\mathrm{Re}[z] = x,\ \mathrm{Im}[z] = y$ y $\overline{z} = x - iy$.

   a) En general, si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, el segmento de recta parametrizado que los une está dado por $\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de modo que:

$$\gamma(t) = \left(\frac{t-b}{a-b}\right) z_1 + \left(\frac{a-t}{a-b}\right) z_2 = \left(\frac{z_1 - z_2}{a-b}\right) t + \left(\frac{az_2 - bz_1}{a-b}\right).$$

   Con lo anterior, el segmento de recta considerado, puede parametrizarse por $\gamma : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de modo que:

$$\gamma(t) = t(1-i) \implies \gamma'(t) = (1-i).$$

   Entonces, de la definición de integral sobre una curva:

$$\int_\sigma f(z)dz = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt,$$

   se puede sustituir la parametrización anterior en las integrales de interés:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathrm{Re}[z]dz &= \int_\gamma \frac{z+\overline{z}}{2}dz = \int_0^1 \left[\frac{t(1-i)+\overline{t(1-i)}}{2}\right](1-i)dt \\
&= \frac{1-i}{2}\int_0^1 t(1-i)+t(1+i)dt = \frac{1-i}{2}\int_0^1 2tdt \\
&= (1-i)\int_0^1 tdt = (1-i)\frac{t^2}{2}\bigg|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}(1-i), \\
\int_\gamma \mathrm{Im}[z]dz &= \int_\gamma \frac{z-\overline{z}}{2i}dz = \int_0^1 \left[\frac{t(1-i)-\overline{t(1-i)}}{2i}\right](1-i)dt \\
&= \frac{1-i}{2i}\int_0^1 t(1-i)-t(1+i)dt = \frac{1-i}{2i}\int_0^1 -2itdt \\
&= (i-1)\int_0^1 tdt = (i-1)\frac{t^2}{2}\bigg|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}(i-1), \\
\int_\gamma \overline{z}dz &= \int_\gamma \overline{t(1-i)}(1-i)dt = \overline{(1-i)}(1-i)\int_0^1 tdt \\
&= |1-i|^2\int_0^1 tdt = 2\ \frac{t^2}{2}\bigg|_{t=0}^{t=1} = 2\frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

b) La manera usual de parametrizar una circunferencia en $\mathbb{R}^2$ es mediante $\sigma : [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, utilizando el isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, una parametrización natural de la circunferencia es $\gamma : [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it}$, así se consideran:

$$\gamma(t) = e^{it} \implies \gamma'(t) = ie^{it}.$$

Utilizando el mismo procedimiento que en el inciso anterior:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \operatorname{Re}[z]dz &= \int_\gamma \frac{z+\overline{z}}{2}dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(e^{it} + \overline{e^{it}}\right) ie^{it}dt \\
&= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} (e^{it} + e^{-it})e^{it}dt = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} (e^{2it} + 1)dt \\
&= \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2i}e^{2it} + t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2i} + 2\pi - \frac{1}{2i} - 0\right) = i\pi, \\
\int_\gamma \operatorname{Im}[z]dz &= \int_\gamma \frac{z-\overline{z}}{2i}dz = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \left(e^{it} - \overline{e^{it}}\right) ie^{it}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (e^{it} - e^{-it})e^{it}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (e^{2it} - 1)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i}e^{2it} - t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i} - 2\pi - \frac{1}{2i} - 0\right) = -\pi, \\
\int_\gamma \overline{z}dz &= \int_0^{2\pi} \overline{e^{it}}(ie^{it})dt = i\int_0^{2\pi} e^{-it}e^{it}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.
\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

c) La parametrización en este caso resulta sólo de trasladar al punto a. Es decir, tomando $\gamma : [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\gamma(t) = a + e^{it} \implies \gamma'(t) = ie^{it}.$$

Procediendo de manera idéntica a los incisos anteriores:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathrm{Re}[z]dz = \int_\gamma \frac{z+\overline{z}}{2}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{(a+e^{it}) + \overline{(a+e^{it})}}{2}(ie^{it})dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a+\overline{a}}{2} + \frac{e^{it}+\overline{e^{it}}}{2}\right] ie^{it}dt \\
&= \mathrm{Re}[a] \int_0^{2\pi} ie^{it}dt + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\overline{e^{it}}}{2} ie^{it}dt \\
&= \mathrm{Re}[a]\ \frac{i}{i}e^{it}\Big|_{t=0}^{t=2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\overline{e^{it}}}{2} ie^{it}dt = i\pi,
\end{aligned}$$

donde se utilizó que la exponencial es 2π-periódica y que la segunda integral es la calculada en el inciso anterior.
Análogamente, para las otras dos integrales:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathrm{Im}[z]dz = \int_\gamma \frac{z-\overline{z}}{2i}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{(a+e^{it}) - \overline{(a+e^{it})}}{2i}(ie^{it})dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a-\overline{a}}{2i} + \frac{e^{it}-\overline{e^{it}}}{2i}\right] ie^{it}dt \\
&= \mathrm{Im}[a] \int_0^{2\pi} ie^{it}dt + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}-\overline{e^{it}}}{2i} ie^{it}dt = -\pi, \\
\int_\gamma \overline{z}dz &= \int_0^{2\pi} \overline{(a+e^{it})}ie^{it}dt = \overline{a}\int_0^{2\pi} ie^{it}dt + \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.
\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Primero, como a es un cero de orden k de f, existe una función analítica g tal que $g(a) \neq 0$ y
$$f(z) = (z-a)^k g(z).$$
Por la regla del producto, la derivada de f se puede expresar como:
$$f'(z) = (z-a)^k g'(z) + k(z-a)^{k-1} g(z),$$
entonces, el integrando de interés se puede reescribir como
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-a)^k g'(z) + k(z-a)^{k-1} g(z)}{(z-a)^k g(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{k}{z-a}.$$
Ahora, como g es analítica en discos de radio pequeño centrados en a y $g(a) \neq 0$, en particular $\frac{g'(z)}{g(z)}$ es analítica cerca de a, así
$$\int_{|z|=R} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = 0.$$
Calculando explícitamente la integral de interés, considerando lo anterior, se tiene que:
$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{k}{z-a} dz \\ &= \frac{k}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{dz}{z-a} = \frac{k}{2\pi i} n(\gamma, a) 2\pi i = k. \end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. $\Longrightarrow\rfloor$ Sea f función analítica con $f'(z) \neq 0$ para $z \in \Omega$, para ver que f como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es conforme, es necesario probar que su derivada define una transformación ortogonal, posiblemente compuesta con una homotecia.

   Como f es analítica, particularmente en su descomposición como $f = u + iv$, con $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, satisface las Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

   Entonces, como $f'(z) \neq 0$, en particular se tiene que:

$$\frac{df}{dz} \neq 0 \iff \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0 \iff \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0$$

   Considerando a $f = u + iv$ como su identificación $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $G(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, tomando su derivada se tiene que:

$$DG = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \overset{\text{C-R}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det DG = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2 \neq 0$$

   Además, por las Ecuaciones de Cauchy-Riemann, la transpuesta de la derivada satisface que

$$DG^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow DG^T DG = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \end{pmatrix} = |f'(z)|^2 \mathbb{I} = DGDG^T$$

   Lo cual verifica que es una matriz ortogonal, posiblemente compuesta con una homotecia, es decir, en cada punto es una rotación compuesta con una homotecia y ambas transformaciones preservan ángulos con orientación.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

$\Longleftarrow]$ Sea f como función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ conforme.
Considerando a $f = u + iv$ como su identificación $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $G(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Como G es conforme, su derivada es tal que $DG = \lambda R$, con $\lambda \neq 0$ y R una matriz de rotación, en particular, como $\det R = 1$ para cualquier rotación, y al ser $\lambda \neq 0$, se tiene que:

$$\det DG = \lambda^2 \neq 0$$

Ahora, de resultados básicos de Geometría Analítica, se sabe que las matrices de rotación en $\mathbb{R}^2$ son de la forma:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Entonces, para $(x_0, y_0) \in \Omega$ y por la definición de la igualdad de matrices se tiene que:

$$DG(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, v_0) = \lambda \cos\theta = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\lambda \operatorname{sen}\theta = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{cases}$$

Pero esta última condición es equivalente a las Ecuaciones de Cauchy-Riemann, que además al ser proporcionales al seno y coseno, las derivadas son de clase $\mathcal{C}^\infty$, en particular son continuas, entonces, al u y v satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann y ser de clase $\mathcal{C}^1$, la función $f = u + iv$ es analítica, además $0 \neq \det DG = |f'(z_0)|^2 \iff f'(z) \neq 0$ ya que $z_0 \equiv (x_0, y_0) \in \Omega$ fue arbitrario.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Como se busca dar una expresión en serie de F, una estrategia natural es calcular la serie de Taylor de F, la cual se puede calcular con el lema de derivación bajo el signo de la integral, el cual es válido ya que f y g son analíticas, por lo que su producto es una función analítica y la curva γ es $\mathcal{C}^1$, es decir, si $h(z,\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi} g\left(\frac{z}{\xi}\right)$, las derivadas de F estarán dadas por:

$$F(z) = \int_\gamma h(z,\xi) d\xi \implies F'(z) = \int_\gamma \frac{\partial h}{\partial z}(z,\xi) d\xi.$$

Del mismo modo, por unicidad de la serie de Taylor, se sabe que los coeficientes de las expansiones de f y g son:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \implies a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$
$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n \implies b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}.$$

Entonces, notando que las derivadas de h respecto a z sólo se calculan respecto a g con la regla de la cadena, se tiene en general que:

$$\frac{\partial^n h}{\partial z^n}(z,\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} g^{(n)}\left(\frac{z}{\xi}\right) \implies \frac{\partial^n h}{\partial z^n}(0,\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} g^{(n)}(0) = \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} n! b_n.$$

Así, la n-ésima derivada de F evaluada en 0 es:

$$\begin{aligned}
F^{(n)}(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\partial^n h}{\partial z^n}(0,\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} b_n n! d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\xi^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \right) b_n n! d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_n n! \xi^{k-(n+1)} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_n n! \int_\gamma \xi^{k-(n+1)} d\xi,
\end{aligned}$$

donde en la última integral se utilizó la convergencia uniforme de la serie de Taylor para intercambiar con la serie, además, por el teorema de Cauchy, la última integral vale $2\pi i$ siempre y cuando $k-(n+1) = -1 \iff k = n$, así se tiene que explícitamente la expresión anterior se reduce a:

$$F^{(n)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_n n! \int_\gamma \xi^{k-(n+1)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} a_n b_n n! 2\pi i = a_n b_n n!.$$

Utilizando lo anterior, se puede sustituir en la serie de Taylor de F como:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n b_n n!}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. Partiendo de la fórmula integral de Cauchy para la n-ésima derivada:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\ n \geq 0.$$

Entonces, por la desigualdad del triángulo para integrales, se tiene simplemente que:

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(a)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi}\int_C \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}}|dz| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_C \frac{M}{r^{n+1}}|dz| \\
&= \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}\operatorname{long}(C) = \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{Mn!}{r^n}.
\end{aligned}$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323