Variable Compleja I
Unidad 4: Tarea en equipo

Estos son los enunciados de la tarea en equipos. Deberán entregarla de acuerdo a todas las instrucciones indicadas en Moodle.

1. Evalúa las integrales:

$$\int_C \mathrm{Re}[z]dz, \quad \int_C \mathrm{Im}[z]dz \quad \text{y} \quad \int_C \overline{z}dz.$$

   a lo largo de las curvas C descritas por:

   a) El segmento de recta que une 0 y $1-i$.
   b) La circunferencia $|z| = 1$ y.
   c) La circunferencia $|z-a| = 1$.

2. Sea $f : \overline{B}(a,R) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en $\overline{B}(a,R)$ con un único cero a en el interior de este conjunto. Demuestra que, si k es el orden de a, entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = k.$$

3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ una región y $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Demuestra que f es analítica con $f'(z) \neq 0$ si y sólo si f como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es conforme.

4. Sean $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ convergentes para $|z| < R$, para algún $R > 0$, y sea γ una circunferencia de radio $r < R$. Se define:

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi} g\left(\frac{z}{\xi}\right) d\xi.$$

   Demuestra que $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$.

5. Sea $f : B(a,r) \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en $B(a,r)$. Demuestra que, para $n \in \mathbb{N}$, y $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ se cumple que:

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{Mn!}{r^n}.$$

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323