Variable Compleja I
Unidad 5: Tarea en equipo con soluciones

Problemas

1. Considera la función $f(z) = \log(1+z)$ en la rama donde $f(0) = 0$.

   a) Integrando la serie geométrica, calcula la serie de Taylor de f alrededor de $z = 0$.

   b) Determina el radio de convergencia de la serie.

   c) Utilizando el resultado de a), calcula la serie de Taylor de $g(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ alrededor de $z = 0$.

2. Sea f una función entera y sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a| < R$ y $|b| < R$ para un real positivo R.

   a) Calcula
   $$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$

   b) Si f es acotada, demuestra que
   $$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 0,$$
   y concluye el teorema de Liouville.

3. Calcula la integral
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$$

   Sugerencia. Cualquier intervalo en $\mathbb{R}$, es una curva en el eje real del plano complejo, intenta construir con un intervalo simétrico $[-R, R]$ un semicírculo en el plano complejo y teorema del Residuo.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Demuestra que para $z \neq 0$, entonces

$$e^{\frac{1}{2}\alpha\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) z^n,$$

donde los coeficientes, para $n \geq 0$, son:

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - \alpha \operatorname{sen} \theta) d\theta.$$

Teorema (del módulo máximo). Sea $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en el interior de la región acotada por una curva cerrada simple C no constante, entonces el máximo de $|f|$ se alcanza sobre la curva C.

5. Considera la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = (z-1)^2$ y el cuadrado definido por:

$$C = \{(x, y)\ ;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Encuentra el máximo de $|f|$ sobre el cuadrado.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Soluciones

1. Sea $f(z) = \log(1+z)$.

   a) Se sabe que

   $$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \qquad \text{y} \qquad \log(1+z) = \int_0^z \frac{dw}{1+w}.$$

   Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$, entonces, sustituyendo la serie geométrica en la relación integral y utilizando la convergencia uniforme en esta región, se tiene que:

   $$\begin{aligned}\log(1+z) &= \int_0^z \frac{dw}{1+w} = \int_0^z \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k w^k \right) dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^z (-1)^k w^k dw = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^z w^k dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}.\end{aligned}$$

   b) El k-ésimo sumando es $u_k = (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1}$, entonces por el criterio de la razón se tiene que:

   $$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{kz}{k+1} \right| = |z| < 1,$$

   donde se pide que el límite sea menor a 1 para que la serie converja. Así la región de convergencia de la serie de $\log(1+z)$ es la misma que la de la serie geométrica.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

c) De las propiedades del logaritmo, se sabe que, al tener que $|z| < 1 \iff |-z| < 1$:

$$g(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \log(1+z) - \log(1-z) = f(z) - f(-z).$$

Entonces, sustituyendo la serie de f evaluada en z y en $-z$ se tiene que, en la región de convergencia definida por $|z| < 1$:

$$\begin{aligned}
\log(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots\,, \\
\log(1-z) &= -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots\,, \\
\implies \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) &= \log(1+z) - \log(1-z) \\
&= [z - (-z)] + \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right] + \left[\frac{z^3}{3} + \frac{z^3}{3}\right] + \cdots \\
&= 2\left[z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2z^{2k+1}}{2k+1}.
\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

2. Definiendo de manera auxiliar la función $g : \mathbb{C}\backslash\{a, b\} \to \mathbb{C}$

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}.$$

a) Entonces, por el teorema del Residuo, al estar a y b dentro de la región acotada por el círculo, se tiene que la integral original se puede calcular como:

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \int_{|z|=R} g(z)dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(g,a) + \operatorname{Res}(g,b)\right].$$

Considerando primero el caso en que $a \neq b$. Para calcular ambos residuos, se tiene simplemente que:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g,a) &= \lim_{z\to a} g(z)(z-a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}(z-a) \\
&= \lim_{z\to a} \frac{f(z)}{z-b} = \frac{f(a)}{a-b}, \\
\operatorname{Res}(g,b) &= \lim_{z\to b} g(z)(z-b) = \lim_{z\to b} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}(z-b) \\
&= \lim_{z\to b} \frac{f(z)}{z-a} = \frac{f(b)}{b-a}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión calculada para la integral, se tiene que:

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 2\pi i \frac{f(a)-f(b)}{a-b}.$$

Cuando $a = b$, por la fórmula integral de Cauchy, se tiene simplemente que:

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz = f'(a).$$

b) Sea $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in \mathbb{C}$ y la parametrización de la circunferencia $\gamma : [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = Re^{it}$ (así $\gamma'(t) = Rie^{it}$), entonces:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\gamma g(z)dz\right| &= \left|\int_0^{2\pi} g(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_0^{2\pi} |g(\gamma(t))\gamma'(t)|dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left|\frac{f(Re^{it})}{(Re^{it}-a)(Re^{it}-b)} Rie^{it}\right| dt \\
&\leq \int_0^{2\pi} \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)} R dt = \frac{MR2\pi}{(R-|a|)(R-|b|)}.
\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Así se tiene una cota superior para el módulo de la integral de g, tomando el límite de ésta cuando $R \to \infty$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \left| \int_\gamma g(z)dz \right| &\leq \lim_{R\to\infty} \frac{MR2\pi}{(R-|a|)(R-|b|)} \\
&= 2\pi M \lim_{R\to\infty} \frac{R}{R^2-(|a|+|b|)R+|a||b|} \\
&= 2\pi M \lim_{R\to\infty} \frac{\frac{1}{R}}{1-(|a|+|b|)\frac{1}{R}+\frac{|a||b|}{R^2}} = 0
\end{aligned}$$

Así, por la no negatividad del módulo, se concluye que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 0.$$

Para concluir el teorema de Liouville, hay que argumentar por qué f ha de ser constante. Por el resultado del primer inciso, el límite calculado implica que:

$$\begin{gathered}
\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 0 \\
\iff 2\pi i \frac{f(a)-f(b)}{a-b} = 0 \iff f(a) = f(b),
\end{gathered}$$

caso para el que se consideró que $a \neq b$, de lo anterior, al ser $a, b \in \mathbb{C}$ arbitrarios, $f(z) = f(a)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, es decir, f es constante.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

3. Considerando la función $f : \mathbb{C}\backslash\{-i, i\} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1},$$

observando primero que para $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Im}[z_0] = 0$, entonces

$$f(z_0) = \frac{e^{iz_0}}{z_0^2+1} = \frac{\cos z_0 + i \operatorname{sen} z_0}{z_0^2+1} \implies \mathrm{Re}[f(z_0)] = \frac{\cos z_0}{z_0^2+1}.$$

Ahora, si se considera la curva $\mathcal{C}^1$ por pedazos que describe la curva cerrada de tomar el semicírculo de radio $R > 1$ sobre el eje real, dígase, el parametrizado por $\gamma : [0, \pi+1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dado por

$$\gamma(t) = \begin{cases} -R + 2Rt, & \text{si } t \in [0,1], \\ Re^{i(t-1)}, & \text{si } t \in [1, \pi+1], \end{cases} = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{si } t \in [0,1], \\ \gamma_2(t), & \text{si } t \in [1, \pi+1]. \end{cases}$$

Por un lado, por el teorema del residuo y al ser $z = i$ el único polo contenido en la región delimitada por la curva descrita por γ, se tiene que:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i),$$

donde ese residuo se puede calcular como:

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f,i) &= \lim_{z\to i} f(z)(z-i) = \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} \\ &= \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}(z-i) \\ &= \lim_{z\to i} \frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{i^2}}{2i} = \frac{1}{2ie}, \end{aligned}$$

de modo que la integral sobre la curva cerrada es

$$\int_\gamma f(z)dz = \frac{\pi}{e}.$$

Por otro lado, la integral sobre la curva cerrada puede calcularse como:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz,$$

en particular, al ser γ_1 un segmento de recta sobre el eje real, lo anterior puede reescribirse como

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

Desarrollando la expresión anterior, se puede notar que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\
&= \int_{-R}^{R} \left(\frac{\cos x}{x^2+1} + i\frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1}\right) dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+1}dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+1}dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+1}dx + \int_{\gamma_2} f(z)dz,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utilizó el resultado clásico de Cálculo Integral de la integral de una función impar en un dominio simétrico (el intervalo $[-R, R]$ es simétrico respecto al origen, la función $\operatorname{sen} x$ es impar y $(x^2+1)^{-1}$ es par, por lo que su producto es impar). Para evaluar la última integral, considerando la reparametrización de γ_2 dada por $\sigma : [0, \pi] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\sigma(t) = Re^{it}$ se tiene por la definición de integral sobre una trayectoria que:

$$\begin{aligned}
\left|\int_\sigma f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi f(\sigma(t))\sigma'(t)dt\right| &\leq \int_0^\pi |f(\sigma(t))\sigma'(t)|dt \\
&= R\int_0^\pi \frac{\left|e^{iRe^{it}}\right|}{|R^2e^{2it}+1|}dt = R\int_0^\pi \frac{\left|e^{iR(\cos t + i\operatorname{sen} t)}\right|}{|R^2e^{2it}+1|}dt \\
&= R\int_0^\pi \frac{\left|e^{iR\cos t}\right|\left|e^{-R\operatorname{sen} t}\right|}{|R^2e^{2it}+1|}dt = R\int_0^\pi \frac{e^{-R\operatorname{sen} t}}{|R^2e^{2it}+1|}dt \\
&\leq R\int_0^\pi \frac{e^{-R\operatorname{sen} t}}{R^2-1}dt \leq R\int_0^\pi \frac{1}{R^2-1}dt = \frac{R\pi}{R^2-1},
\end{aligned}$$

donde se utilizó que $t \in [0, \pi] \implies R\operatorname{sen} t \in [0, R] \implies e^{-R\operatorname{sen} t} \in [0, 1]$. Tomando el límite cuando $R \to \infty$ en la desigualdad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\left|\int_\sigma f(z)dz\right| &\leq \lim_{R\to\infty}\frac{R\pi}{R^2-1} = 0 \\
\implies \lim_{R\to\infty}\int_\sigma f(z)dz &= \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.
\end{aligned}$$

Así, utilizando el resultado obtenido por el teorema del Residuo y la descomposición de la integral dada, se concluye que:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{e} = \lim_{R\to\infty}\int_\gamma f(z)dz &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz, \\
\implies \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}dx &= \frac{\pi}{e}.
\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Al ser $z = 0$ una singularidad finita de la función $f(z) = e^{\frac{1}{2}\alpha\left(z-\frac{1}{z}\right)}$, por el teorema de Laurent, la función tiene una expresión como serie de Laurent de la forma:

$$e^{\frac{1}{2}\alpha\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) z^n,$$

para $|z| > 0$, donde los coeficientes están dados por la fórmula integral de Cauchy por:

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{z^{n+1}} dz,$$

donde C es cualquier curva cerrada que tenga en su interior a $z = 0$. Considerando C como la circunferencia de radio 1 y haciendo el cambio de variable $z = e^{i\theta}$ ($\implies dz = ie^{i\theta}d\theta$), se pueden calcular los coeficientes como:

$$\begin{aligned}
J_n(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}}{e^{i(n+1)\theta}} ie^{i\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\alpha \operatorname{sen}\theta}}{e^{i(n+1)\theta}} e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\alpha \operatorname{sen}\theta - n\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\cos(\alpha \operatorname{sen}\theta - n\theta) + i \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{sen}\theta - n\theta)\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\alpha \operatorname{sen}\theta - n\theta) d\theta + i\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{sen}\theta - n\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Ahora, para concluir que la parte imaginaria es 0, haciendo el cambio de variable $\theta = 2\pi - \phi$ y por la periodicidad e imparidad del seno:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{sen}\theta - n\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}[\alpha \operatorname{sen}(2\pi - \phi) - n(2\pi - \phi)] d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}[\alpha \operatorname{sen}(-\phi) - n2\pi + n\phi] d\phi \\
&= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(-\alpha \operatorname{sen}\phi - n2\pi + n\phi) d\phi \\
&= -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{sen}\phi - n\phi) d\phi,
\end{aligned}$$

$$\implies \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\alpha \operatorname{sen}\theta - n\theta) d\theta = 0.$$

Entonces, sustituyendo lo anterior en la integral para los coeficientes se concluye que:

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\alpha \operatorname{sen}\theta - n\theta) d\theta.$$

A los coeficientes $J_n(\alpha)$ se les conoce como *funciones de Bessel* y a la función $f(z) = e^{\frac{1}{2}\alpha\left(z-\frac{1}{z}\right)}$, *función generadora de las funciones de Bessel*.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

5. Observando primero que, al ser f polinomial, es analítica en todo $\mathbb{C}$, en particular lo es en C y en su interior, y continua en la frontera de C. Por el principio del módulo máximo, se sabe que $|f|$ alcanzará su máximo en la frontera de C, la cual es un cuadrado de lado 1. Entonces, si L_i denota el i-ésimo lado del cuadrado, $i = 1, 2, 3, 4$, el máximo buscado puede calcularse como:
$$\max_C |f| = \max\{\max_{L_i} |f| \ : \ i = 1, 2, 3, 4\}.$$
Calculando el máximo en cada lado:

   - $L_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \text{Re}[z] \in [0, 1], \ \text{Im}[z] = 0\}$. Este segmento se puede parametrizar como $\gamma_1 : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_1(t) = t$, de modo que:
   $$\max_{L_1} |f| = \max_{t\in[0,1]} |(t-1)^2| = \max_{t\in[0,1]} (t-1)^2,$$
   al ser un segmento de parábola vertical con vértice en $t = 1$ con t en el intervalo $[0, 1]$, el máximo se alcanza en $t = 0$, entonces
   $$\max_{L_1} |f| = (0-1)^2 = 1.$$
   - $L_2 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \text{Re}[z] = 1, \ \text{Im}[z] \in [0, 1]\}$. Este segmento se puede parametrizar como $\gamma_2 : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_2(t) = 1 + it$, de modo que:
   $$\max_{L_2} |f| = \max_{t\in[0,1]} |(1+it-1)^2| = \max_{t\in[0,1]} |-t^2| = \max_{t\in[0,1]} t^2,$$
   al ser un segmento de parábola vertical con vértice en $t = 0$ con t en el intervalo $[0, 1]$, el máximo se alcanza en $t = 1$, entonces
   $$\max_{L_2} |f| = 1^2 = 1.$$
   - $L_3 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \text{Re}[z] \in [0, 1], \ \text{Im}[z] = 1\}$. Este segmento se puede parametrizar como $\gamma_3 : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = t + i$, de modo que:
   $$\begin{aligned}\max_{L_3} |f| &= \max_{t\in[0,1]} |((t+i)-1)^2| = \max_{t\in[0,1]} |(t+i)^2 - 2(t+i) + 1| \\ &= \max_{t\in[0,1]} |t(t-2) + i(2t-2)| = \max_{t\in[0,1]} \sqrt{t^2(t-2)^2 + 4(t-1)^2} \\ &= \max_{t\in[0,1]} \sqrt{t^4 - 4t^3 + 8t^2 - 8t + 4} \\ &= \max_{t\in[0,1]} \sqrt{(t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1) + 2(t^2 - 2t + 1) + 1} \\ &= \max_{t\in[0,1]} \sqrt{(t-1)^4 + 2(t-1)^2 + 1} = \max_{t\in[0,1]} \sqrt{[(t-1)^2 + 1]^2} \\ &= \max_{t\in[0,1]} [(t-1)^2 + 1],\end{aligned}$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

al ser un segmento de parábola vertical con vértice en $t = 1$ trasladada una unidad hacia arriba con t en el intervalo $[0, 1]$, el máximo se alcanza en $t = 0$, entonces

$$\max_{L_3} |f| = (0-1)^2 + 1 = 2.$$

- $L_4 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}[z] = 0, \ \mathrm{Im}[z] \in [0,1]\}$. Este segmento se puede parametrizar como $\gamma_4 : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_4(t) = it$, de modo que:

$$\begin{aligned}\max_{L_4} |f| &= \max_{t\in[0,1]} |(it-1)^2| = \max_{t\in[0,1]} |-t^2+1-2it| \\ &= \max_{t\in[0,1]} |t^2+2it-1| = \max_{t\in[0,1]} \sqrt{(t^2-1)^2+4t^2} \\ &= \max_{t\in[0,1]} \sqrt{(t^2+1)^2} = \max_{t\in[0,1]} (t^2+1),\end{aligned}$$

al ser un segmento de parábola vertical con vértice en $t = 0$ trasladada una unidad hacia arriba con t en el intervalo $[0, 1]$, el máximo se alcanza en $t = 1$, entonces

$$\max_{L_4} |f| = 1^2 + 1 = 2.$$

Juntando los resultados para cada lado del cuadrado, se puede concluir:

$$\max_{C} |f| = \max\{1, 1, 2, 2\} = 2.$$

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323