Variable Compleja I
Unidad 5: Tarea en equipo

Estos son los enunciados de la tarea en equipos. Deberán entregarla de acuerdo a todas las instrucciones indicadas en Moodle.

1. Considera la función $f(z) = \log(1+z)$ en la rama donde $f(0) = 0$.
   a) Integrando la serie geométrica, calcula la serie de Taylor de f alrededor de $z = 0$.
   b) Determina el radio de convergencia de la serie.
   c) Utilizando el resultado de a), calcula la serie de Taylor de $g(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ alrededor de $z = 0$.
2. Sea f una función entera y sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a| < R$ y $|b| < R$ para un real positivo R.
   a) Calcula
   $$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz.$$
   b) Si f es acotada, demuestra que
   $$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = 0,$$
   y concluye el teorema de Liouville.
3. Calcula la integral
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$$
   Sugerencia. Cualquier intervalo en $\mathbb{R}$, es una curva en el eje real del plano complejo, intenta construir con un intervalo simétrico $[-R, R]$ un semicírculo en el plano complejo y teorema del Residuo.

Variable Compleja I, COMAL Matemáticas a Distancia, Facultad de Ciencias, UNAM
Sitio web del curso: `http://www.mdistancia.com/comal/13`.
Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323

4. Demuestra que para $z \neq 0$, entonces

$$e^{\frac{1}{2}\alpha\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) z^n,$$

donde los coeficientes, para $n \geq 0$, son:

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - \alpha \operatorname{sen}\theta) d\theta.$$

Teorema (del módulo máximo). Sea $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en el interior de la región acotada por una curva cerrada simple C no constante, entonces el máximo de $|f|$ se alcanza sobre la curva C.

5. Considera la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = (z-1)^2$ y el cuadrado definido por:

$$C = \{(x, y)\ ;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Encuentra el máximo de $|f|$ sobre el cuadrado.

Trabajo realizado con el apoyo del Programa UNAM-DGAPA-PAPIME PE109323